M2A Mathematik **Vordiplom**

Dr. Andreas Stahel
HTA Biel
22. September 1999, 14:00 – 17:00

Aufgabe 1: Im Jahr 1983 hatte die Schweiz eine Bevölkerung von 6'410'000 Einwohnern, davon waren 947'000 Ausländer. Im gleichen Jahr sprachen die Gerichte 22'055 Verurteilungen aus, von denen 6'615 Ausländer betrafen. Man wählt zufällig eine Person aus der Bevölkerung aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person

(a) verurteilt worden ist, wenn es sich um einen Schweizer oder eine Schweizerin handelt?

(b) verurteilt worden ist, wenn es sich um einen Ausländer oder eine Ausländerin handelt?

(c) eine Schweizerin oder ein Schweizer ist und verurteilt worden ist?

(d) eine Ausländerin oder ein Ausländer ist und verurteilt worden ist?

(e) eine Schweizerin oder ein Schweizer ist, wenn man weiss, dass sie verurteilt worden ist?

(f) eine Ausländerin oder ein Ausländer ist, wenn man weiss, dass sie verurteilt worden ist?

Aufgabe 2: In einer Produktionsanlage werden Bauteile in Massenproduktion hergestellt. Die Ausschussquote darf 5% nicht übersteigen. Zu jeder Stunde werden n Teile zufällig herausgezogen und sorgfältig untersucht.

(a) (7 Punkte) Mit 90% Sicherheit soll beobachtet werden ob die Fehlerquote 5% übersteigt. Die Produktion wird unterbochen falls **ein** oder mehr Teile der Testmenge defekt sind. Wie gross muss n gewählt werden.

(b) (3 Punkte) Mit 95% Sicherheit soll beobachtet werden ob die Fehlerquote 5% übersteigt. Die Produktion wird unterbochen falls **zwei** oder mehr Teile der Testmenge defekt sind. Wie gross muss n gewählt werden.

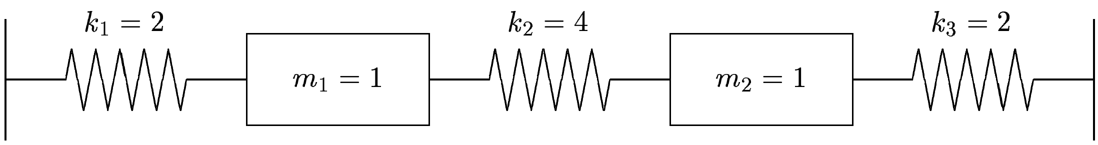
Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{L}[t-1+\cos(3t)](s) \\ B &= \mathcal{L}[t^3\, U(t-2)]\,(s) \\ C &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}-\frac{e^{-4s}}{s-2}]\,(t) \\ D &= \iint\limits_K x^3\, dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \iint\limits_K \nabla \begin{pmatrix} x^4-y \\ \sinh x^3 \end{pmatrix} dA \\ F &= \oint_{\partial K} \begin{pmatrix} y\,\sin x \\ -\frac{1}{2}\,y^2\,\cos x \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\, ds \end{aligned}$$

In den Resultaten D, E und F ist K das Rechteck $0 \le x \le 2$ und $0 \le y \le 1$. Die Kurve ∂K ist der Rand von K.

Aufgabe 4: Betrachten Sie das folgende System von zwei schwingenden Massen gekoppelt durch zwei Federn. Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Auf die beiden Massen wirke eine horizontale Reibungskraft der Stärke $-\dot{x}_1$, resp. $-\dot{x}_2$. Auf die zweite Masse wirke eine externe, horizontale Kraft $f(t)$.



(a) Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für die Grössen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.

(b) Finden Sie die Gleichungen für die Laplacetransformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ dieses Systems, wobei Sie die Anfangsbedingungen beliebig wählen dürfen.

(c) Finden Sie die Transferfunktion des Systems, wobei die Kraft $f(t)$ als Eingang und die Auslenkung $x_1(t)$ als Ausgang betrachtet wird.

(d) Setzt man die externe Kraft $f(t) = 0$, so liegt ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem vor. Zeigen Sie dass dessen Lösungen exponentiell gegen Null konvergieren wie $e^{-\alpha t}$ und bestimmen Sie α.

Aufgabe 5: Eine Kurve C ist gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2 + 2\sin t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$$

(a) Berechnen Sie

$$A = \int_C x\, ds$$

(b) Berechnen Sie

$$B = \int_C \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \vec{ds}$$

Aufgabe 6: Für eine der beiden Differentialgleichungen

$$\ddot{y} - 4\,\dot{y} + 1\,y = -f(t) \quad \text{oder/ou} \quad -\ddot{y} - 5\,\dot{y} - 4\,y = f(t)$$

kann eine Transferfunktion $T(s)$ bestimmt werden. Untersuchen Sie nur diese Gleichung.

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung falls $f(t) = e^{2t}$.

(b) Finden Sie die Transferfunktion $T(s)$.

(c) Skizzieren Sie den Bode–Plot der Amplitude für die obige Transferfunktion (ohne Taschenrechner).

Aufgabe 7: Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

auf Kreisen K_r mit variablem Radius r und Mittelpunkt im Ursprung.

(a) Wie gross muss $r > 0$ gewählt werden, damit

$$\iint_{K_r} f(x,y)\; dA = 0$$

(b) Wie gross muss die Konstante c sein, damit

$$\iint_{K_2} f(x,y) + c\; dA = 1$$
