M2a Analysis **Prüfung 4**

Dr. A. Stahel 2.7.1999

Aufgabe 1: Für die folgenden linearen Differentialgleichungen ist zu entscheiden ob die Lösungen exponentiell gegen Null konvergieren. Die Antworten sind zu begründen.

(a)

$$7\,\ddot{y} + 4\,\dot{y} + \frac{1}{2}\,y = 0$$

(b)

$$y''' - 3y'' + y' + 17\,y = 0$$

(c)

$$y^{(4)} + 9\,y''' + y'' + 16\,y' + y = 0$$

(d)

$$3\,\ddot{y} + 2\,\dot{y} + y + 1 = 0$$

(e) Für welche Werte von k konvergieren die Lösungen gegen Null?

$$(k-3)\,\ddot{y} + 7\,\dot{y} + (7-k)\,y = 0$$

Aufgabe 2: Die Transferfunktion eines Systems ist gegeben durch

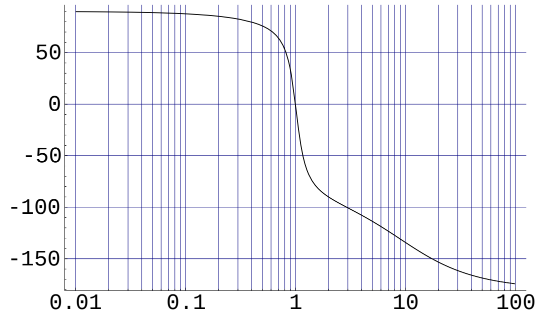
$$G(s) = \frac{10\,s}{s^3 + 10s^2 + 4s + 10}$$

(a) Untersuchen Sie den Bode–Plot des Amplitudenfaktors für

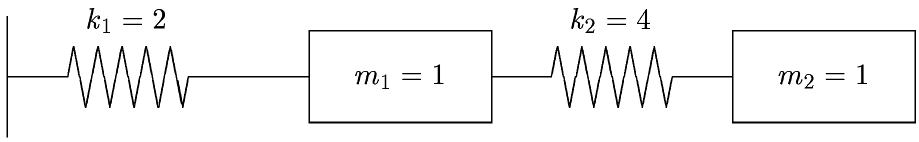
- sehr grosse Werte von $s = i\,\omega$
- sehr kleine Werte von $s = i\,\omega$ um den Bode–Plot zu erstellen.

Es sollten sich zwei Geraden ergeben, die den Plot gut approximieren werden. Skizzieren Sie diese beiden Geraden für den Bereich $0.01 < \omega < 100$.

(b) Der Bode–Plot der Phasenverschiebung ist unten rechts gezeigt. Verwenden Sie ihn und Ihr Resultat der obigen Teilaufgabe um den entsprechenden Nyquist–Plot zu erstellen.



Aufgabe 3: Betrachten Sie das folgende System von zwei schwingenden Massen gekoppelt durch zwei Federn.



Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Auf die erste Masse wirke eine horizontale Reibungskraft der Stärke $-\dot{x}_1$. Auf die zweite Masse wirke eine externe, horizontale Kraft $f(t)$ der Form

$$f\,(t) = A\ \cos{(\omega t)}.$$

(a) Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für die Grössen $x_1\,(t)$ und $x_2\,(t)$ auf.

(b) Finden Sie die Gleichungen für die Laplacetransformierten $X_1\,(s)$ und $X_2\,(s)$ dieses Systems, wobei Sie die Anfangsbedingungen beliebig wählen dürfen.

(c) Finden Sie die Transferfunktion des Systems, wobei die Kraft $f\,(t)$ als Eingang und die Auslenkung $x_1\,(t)$ als Ausgang betrachtet wird.

(d) Ignoriert man die externe Kraft f (d.h. $A = 0$), so liegt ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem vor. Zeigen Sie dass dessen Lösungen exponentiell gegen Null konvergieren (wie $e^{-\alpha\,t}$) und bestimmen Sie α.
Tipp: Denken und nur wenig rechnen.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Für $f(x) = \sin(n\pi x)$ ist die Lösung gegeben durch

$$u(x) = \frac{-1}{n^2\pi^2}\,\sin(n\pi\,x)$$

Finden Sie die Lösung der Gleichung für die Funktion $f(x) = 1$ mit Hilfe von Fourierreihen.
Tipp: zuerst Funktion f geeignet erweitern.
