M2a Analysis **Prüfung 2**

Dr. A. Stahel 5.3.1999

Aufgabe 1: Untersuchen Sie

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} y \, dx \, dy$$

(a) Schreiben Sie dieses Integral um in ein Doppelintegral in Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie das Integral exakt.

Aufgabe 2: Ein Körper mit konstanter Dichte ρ ist beschrieben durch die Ungleichungen

$$0 \leq x \leq 3 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq x$$

Dieser Körper wird um die z–Achse rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω.

(a) Stellen Sie ein Doppelintegral auf, um die Rotationsenergie E berechnen zu können.

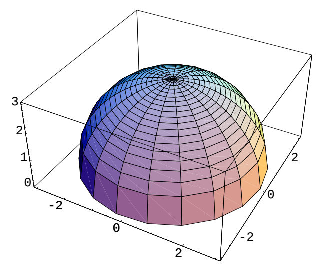
(b) Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals.

Aufgabe 3: Eine Flüssigkeit durchströmt die unten offene Halbkugelfläche (Radius 3, Zentrum im Ursprung und $z > 0$) gemäss dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{F}$.

(a) Stellen Sie ein Doppelintegral in sphärischen Koordinaten auf um den Fluss durch die Fläche zu bestimmen. Das Integral ist **nicht** zu berechnen.

(b) Berechnen Sie den Fluss I durch diese Fläche mit Hilfe des Divergenzsatzes. Die Rechnungen sind exakt auszuführen.
Tipp: Zuerst Fluss durch den Kreis $x^2 + y^2 \leq 3^2$ in der xy–Ebene bestimmen

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 4: In einem Zylinder mit Radius R und Länge L (L sehr gross) wird konstant geheizt. Die Temperatur T_0 an der Aussenfläche kann gemessen werden. Gegeben sind die folgenden Daten.

w	spezifische Heizleistung	$\frac{J}{s\,m^3}$
λ	Wärmeleitfähigkeit	$\frac{J}{s\,m\,K}$
c	Wärmekapazität	$\frac{J}{kg\,K}$
ρ	spezifische Masse	$\frac{kg}{m^3}$
L	Länge	m
R	Aussenradius	m
T_0	Aussentemperatur	K

(a) Zu bestimmen ist die Temperatur $T(r)$ als Funktion des Radius r für $0 \leq r \leq R$.

(b) Skizzieren Sie ein Temperaturprofil.

Tipp: Zuerst hypothetischen Zylinder mit Radius r betrachten und und dessen Heizleistung bestimmen.