1. Vordiplom Analysis M1a

Dr. Andreas Stahel
HTA Biel

6. Oktober 1998, 8:00 – 11:00

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{d}{ds}\, x\, e^{\sin s} \\
B &= \int_0^x x\, \cosh(x\,t)\, dt \\
C &= \frac{d}{dx} \int_{17}^{2\,x} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt \\
D &= \vec{\nabla}(x-y^3) \\
E &= \int_{-\pi}^{\pi} x^3\, \cos(3\,x) + \sinh(x)\, e^{-x^2}\, dx
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Das Polynom

$$f(x) = \frac{1}{4}\, x^4 - \frac{4}{3}\, x^3 + \frac{1}{2}\, x^2 + a\,x + b$$

hat ein Extremum bei $x = 3$ und es gilt $f(0) = 2$. Die Rechnungen für diese Aufgabe sind exakt auszuführen, ohne Taschenrechner.

(a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b.

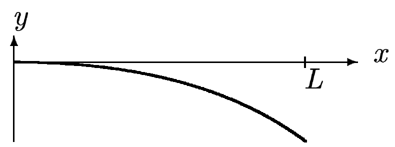
(b) Entscheiden Sie, ob bei $x = 3$ ein Maximum oder Minimum vorliegt.

(c) Finden Sie Lage, Wert und Typ der anderen Extremas.

(d) Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion für den Bereich $-2 \leq x \leq 4$ mit Hilfe der Extremas und des Verhaltens für $x \to \pm\infty$.

Aufgabe 3:

Die maximale Auslenkung eines einseitig eingespannten Balken mit Querschnittsfläche A und einem Flächenträgheitsmoment I des Querschnittes ist gegeben durch



$$y(L) = Y = -\frac{\rho\, g\, A\, L^4}{8\, E\, I}$$

Sind alle anderen Daten bekannt, kann dadurch das Elastizitätmodul E der Materials bestimmt werden. Für einen runden Aluminiumstab der Länge $L = 0.5$ m gilt

$$\rho = 2.7 \cdot 10^3\, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad , \quad I = \frac{\pi\, r^4}{4} \quad , \quad r = 0.001 \text{ m}$$

Eine Messung ergibt $Y = -0.011$ m.

(a) Bestimmen Sie das Elastizitätsmodul E.

(b) Wie genau (absolut und relativ) müssen Y und r bekannt sein, damit der relative Fehler von E kleiner als 1% ist? Alle anderen Grössen werden als exakt vorausgesetzt. Die Überlegungen und Rechnungen sind zu begründen.

Aufgabe 4: Zu untersuchen sind die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

wobei wir voraussetzen, dass $b < 0$ und $c > 0$ fest gegeben sind. Der Parameter a wird variiert.

(a) Für welche Werte von $a > 0$ hat diese Funktion zwei verschiedene, reelle Nullstellen?

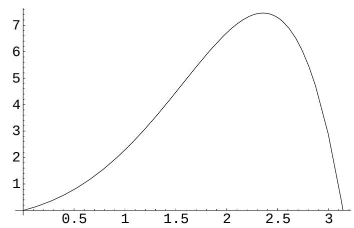
(b) Berechnen Sie für die oben bestimmen Nullstellen x_1 und x_2 die Grenzwerte

$$A = \lim_{a\to 0+} x_1 \quad \text{und} \quad B = \lim_{a\to 0+} x_2$$

Aufgabe 5:
Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = e^x \sin x$$

Zu untersuchen sind Tangenten an diese Kurve.

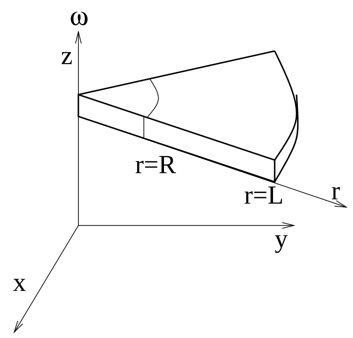


(a) Stellen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $(z, f(z))$ auf, mit der unabhängigen Variablen x.

(b) Es gibt einen ersten positiven Wert z, sodass die Tangente an die Kurve (bei $(z, f(z))$ den Ursprung schneidet. Finden Sie eine Gleichung für den Punkt z.

(c) Finden Sie eine gute Approximation des richtigen Wertes von z. Der Taschenrechner darf verwendet werden.

Aufgabe 6:
Ein Segment einer Scheibe mit Radius L, Dicke h und Winkelöffnung α (siehe nebenstehenden Figur) wird um die z–Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Die Scheibe ist an der z–Achse befestigt und liegt immer parallel zur xy–Ebene. Die spezifische Masse ρ ist gegeben.



Physik: Wird eine Punktmasse m im Abstand r um eine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, so wirkt eine Zentrifugalkraft der Stärke

$$F = m\,r\,\omega^2$$

(a) Bestimmen Sie die in diesem System steckende Rotationsenergie mit Hilfe eines Integrals.

(b) Bei einem Schnitt mit Abstand R von der z–Achse wirkt eine Kraft $F(R)$ auf die Fläche aufgrund der weiter aussen rotierenden Masse. Bestimmen Sie diese mit einem geeigneten Integral über den Bereich $R \le r \le L$.

(c) Berechnen Sie die Zugspannung σ (Einheiten: $\frac{N}{m^2}$) entlang des Schnittes mit Abstand R von der z–Achse.
