M1a Analysis **Prüfung 3**

Dr. A. Stahel 18.5.1998

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die Funktion

$$f\,(x) = x\,e^{-2x}$$

Gesucht wird eine Nullstelle mit Hilfe des Newtonverfahrens. Nach einem Schritt erhält man den Wert $x_1 = 5$.

(a) Bestimmen Sie den(die) Startwert(e) x_0 exakt.

(b) Finden Sie (ohne Rechnung)

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n$$

egen

$$f'\,(x) = e^{-2x}\,(1 - 2\,x)$$

gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\,(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n\,e^{-2x_n}}{e^{-2x_n}\,(1-2\,x_n)} = x_n - \frac{x_n}{1-2\,x_n} = \frac{-2\,x_n^2}{1-2\,x_n}$$

(a) Die Bedingung $x_1 = 5$ führt also auf die Gleichung

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{-2\,x_0^2}{1-2\,x_0} \\ 5 - 10\,x_0 &= -2\,x_0^2 \\ 2\,x_0^2 - 10\,x_0 + 5 &= 0 \\ x_0 &= \frac{1}{4}\,\left(10 \pm \sqrt{100-40}\right) = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

(b) Ein Blick auf den Graphen von $f(x)$ und ein grapisches Anwenden des Verfahrens von Newton ergibt $L = \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Integrale **exakt**. Die Rechnungen sind zu zeigen, d.h. kein Taschenrechner.

(a)

$$A = \int_0^3 \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{x^2}\;dx$$

(b)

$$B = \int_{-3}^{3} x\,e^{-x^2}\;dx$$

(c)

$$C = \int_0^2 e^{2x}\;\cosh e^{2x}\;dx$$

(d)

$$D = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\,\phi}{1+\cos^2\,\phi}\;d\phi$$

(e)

$$E = \int_0^4 \sin(x-2)\,e^{(x-2)^2}\;dx$$

Tip: Zeichnen und denken.

Aufgabe 3: Die Konstante K ist gegeben durch

$$\int_{-7}^{7} e^{-x^2}\;dx = K \approx 1.77$$

Bestimmen Sie den exaken Wert des Integrals

$$\int_0^7 x^2\,e^{-x^2}\;dx$$

Das Resultat wird K enthalten.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die Funktion

$$f\,(x) = \frac{x^3-2x+1}{(x^2-1)\,(x^2+7\,x+12)}$$

(a) Finden Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion $f\,(x)$.

(b) Bestimmen Sie

$$\int f\,(x)\;dx$$

(c) Bestimmen Sie

$$\int_0^6 f\,(x)\;dx$$

Aufgabe 5: Untersuchen Sie das Integral

$$I = \int_0^3 \sinh(2\,x)\;dx$$

(a) Zerlegen Sie das Intervall in vier Teilintervalle und bestimmen Sie eine numerische Approximation von I mit Hilfe der Simpson–Formel.

(b) In wie viele (n) Teilintervalle muss das Intervall zerlegt werden, damit die Trapezregel ein Resultat mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} liefert?

(c) In wie viele (n) Teilintervalle muss das Intervall zerlegt werden, damit die Simpsonregel ein Resultat mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} liefert?
