M1a Analysis **Prüfung 1**

Dr. A. Stahel 18.12.1997

Aufgabe 1:

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung **exakt**.

$$x^3 - 7\,x^2 > 12\,x$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung **exakt**.

$$x > \frac{x-1}{x^2-2}$$

Aufgabe 2: Die Halbachsen einer Ellipse sind parallel zu den Koordinatenachsen und zwei Scheitelpunkte sind gegeben durch $(1,-4)$ und $(5,-1)$. Die Ellipse schneidet die x–Achse.

(a) Finden Sie die Gleichung dieser Ellipse.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit der y–Achse.

(c) Berechnen die Fläche dieser Ellipse mit Hilfe von geeigneten Transformationen und der bekannten Formel für die Kreisfläche.

Aufgabe 3:

(a) Schreiben Sie den Ausdruck $\log_2 x$ um, sodass nur die natürliche Logarithmusfunktion $\ln x$ verwendet wird.

(b) Es gelte $y = \log_2 x^2$ und $x > 0$. Lösen Sie diese Gleichung auf nach x, wobei im Resultat nur die Funktionen $\ln x$, e^x und algebraische Operationen vorkommen dürfen.

(c) Bestimmen Sie die **exakten** Lösungen der Gleichung

$$e^{6\,x} - e^{3\,x} = 6$$

Aufgabe 4: Untersuchen die Funktion $y = f(x) = \sin x$ mit eingeschränktem Definitionsbereich $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$

(a) Bestimmen Sie das Bild dieser Funktion.

(b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild der inversen Funktion f^{-1}.

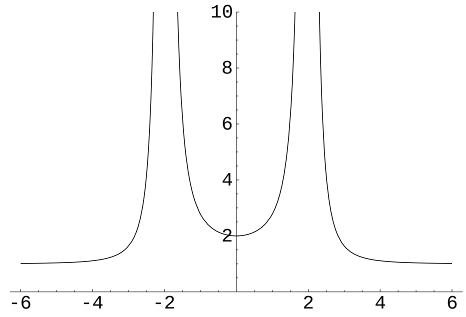
(c) Zeichnen Sie den Graphen der inversen Funktion f^{-1}.

(d) Berechnen Sie $f^{-1}(-0.2)$ (Taschenrechner ist notwendig).

Aufgabe 5:
Rechts sehen Sie den Graphen einer unecht gebrochen rationalen Funktion $f\,(x)$. Die Werte der Funktion $f(x)$ für approximieren 1, falls $|x|$ immer grösser wird. Es gilt $f(0) = 2$.

(a) Finden Sie eine mögliche Formel für die Funktion $f\,(x)$

(b) Geben Sie den Definitionsbereich und das Bild der Funktion an.



Aufgabe 6: (VERBESSERTE VERSION)
Von einer Funktion $y = f(x)$ sind die folgenden Werte bekannt:

$$f\,(0) = 0 \quad , \quad f\,(0.5) = 0.462117 \quad \text{und} \quad f\,(1) = 0.761594$$

(a) Bestimmen Sie den Wert von $f(0.25)$ mit Hilfe einer stückweise linearen Interpolation.

(b) Bestimmen Sie den Wert von $f(0.25)$ mit Hilfe einer quadratischen Funktion.

(c) Skizzieren Sie in einer einfachen Graphik die stückweise lineare Interpolationsfunktion und die quadratische Interpolationsfunktion qualitativ richtig.

(a) Durch Geradenstück verbinden

$$f\,(0.25) \approx \frac{f\,(0) + f\,(0.5)}{2} \approx 0.231085$$

(b) Der Ansatz $f\,(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 0\,a & + & 0\,b & + & c & = & 0 \\ \frac{1}{4}\,a & + & \frac{1}{2}\,b & + & c & = & 0.462117 \\ a & + & b & + & c & = & 0.761594 \end{array}$$

Dieses System von linearen Gleichungen lässt sich mit dem Taschenrechner lösen. Man kann auch aus der ersten Gleichung ablesen, dass $c = 0$. Dann kann man das doppelte der zweiten Gleichung von der dritten subtrahieren und erhält

$$\frac{1}{2}\,a = 0.761594 - 2 \cdot 0.462117 \quad \text{oder} \quad a \approx -0.32528$$

Aus der dritten Gleichung folgt dann

$$b = 0.761594 - a \approx 1.08687$$

Nun haben wir

$$f\,(x) = -0.32528\,x^2 + 1.08687\,x$$

und somit

$$f\,(0.25) = \frac{a}{16} + \frac{b}{4} + c \approx 0.251388$$

Die Aufgabe könnte auch durch eine Interpolation gemäss der Methode von Lagrange gelöst werden. Hier die Rechnungen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0.5)\,\frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)} + f(1)\,\frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)} \\
&= f(0.5)\,\frac{x^2-x}{-1/4} + f(1)\,\frac{x^2-x/2}{1/2} \\
&= f(0.5)\,(-4\,x^2+4\,x) + f(1)\,(2\,x^2-x) \\
&= 0.462117\,(-4\,x^2+4\,x) + 0.761594\,f(1)\,(2\,x^2-x) \\
&= -0.32528\,x^2 + 1.08687\,x
\end{aligned}
$$

(c) Zwei Geradenstücke, beziehungsweise eine Parabel.

Die interpolierten Werte können mit den „richtigen“ Werten verglichen werden, das die Zahlen mit Hilfe der Funktion $\tanh x$ konstruiert wurden. Es gilt $\tanh 0.25 \approx 0.244919$.