M1b Analysis/Analyse **Prüfung/Épreuve 2**

Dr. A. Stahel 22.2.2000

Aufgabe / Problème 1:

Calculer les expressions suivantes. Montrer les résultats intermédiaire.

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Zwischenresultate sind zu zeigen.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\sin\left(2\,x + e^{(x^2)}\right) \\
b &= \frac{d}{dz}\,\frac{x^2 - x\,x}{z^2 + 4\,x} \\
c &= \frac{d}{dx}\,\left(\sqrt[3]{2\,x} + x^x\right) \\
d &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{2\,x} - 2\,x} \\
f &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2\,x} - 1 - 2\,x}{x^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe / Problème 2:

Untersuchen Sie die folgenden Folgen und Reihen. Für die Folgen ist der Grenzwert zu bestimmen, falls möglich. Für die Reihen muss entschieden werden, ob die Reihe konvergiert oder nicht.

Examiner les suites et séries ci-dessous. Pour les suites trouver les limites, si possible. Pour une série décider si elle converge ou pas.

$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 - 17}{3\,n + 17\,n^2} \\
b &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}}{\cos(1/n)} \\
c &= \lim_{h\to 0}\frac{\cosh(14 + 2\,h) - \cosh 14}{h} \\
d &= \lim_{h\to 1}\frac{\cosh(14 + 2\,h) - \cosh 14}{h} \\
e &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\,\pi)}{n} \\
f &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2)}{1 + n^2} \\
g &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh n}{e^{2n}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe / Problème 3:

Les constantes a et b sont positives. Examiner la fonction

Die Konstanten a und b sind positiv. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = a\,x\,e^{-b\,x}$$

(a) La fonction atteint un maximum au point $(1, 2)$. Trouver les valeurs des constantes a et b.

(b) Trouver la coordonnée x du point d'inflexion.

(a) Die Funktion hat ein Maximum beim Punkt $(1\,;\,2)$. Bestimmen Sie die Werte der Konstanten a und b.

(b) Finden Sie die x-Koordinate des Wendepunktes.

Aufgabe / Problème 4:
Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = e^{2\,x}$ in der Nähe des Punktes $x_0 = 1$.

(a) Bestimmen Sie die Taylorapproximation $T_2(x)$ der Ordnung 2 dieser Funktion. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x)$ und $T_2(x)$ auf dem Intervall $0 < x < 2$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorapproximation $T_4(x)$ der Ordnung 4 dieser Funktion. und bestimmen Sie den maximalen Fehler auf dem Intervall $0.5 < x < 1.5$.

Examiner la fonction $f(x) = e^{2\,x}$ proche du point $x_0 = 1$.

(a) Déterminer l'approximation de Taylor $T_2(x)$ de l'ordre 2 de cette fonction. Esquisser les fonctions $f(x)$ et $T_2(x)$ sur l'-intervalle $0 < x < 2$.

(b) Déterminer l'approximation de Taylor $T_4(x)$ de l'ordre 4 de cette fonction et trouver l'erreur maximale sur l'intervalle $0.5 < x < 1.5$.

Aufgabe / Problème 5: Ci-dessous trouver le graphe de la fonction $f(x) = x\;\sin x$. Il existe un seul point $0 < x_0 < \pi$, tel que la tangente au graphe de $f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$ coupe l'axe des y sur hauteur 1. Esquisser cette situation et trouver une **équation** pour le valeur de x_0.

Der Graph der Funktion $f(x) = x\;\sin x$ ist rechts zu sehen. Es gibt einen genau einen Punkt $0 < x_0 < \pi$, sodass die Tangente an den Graphen von $f(x)$ an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ die y-Achse auf der Höhe 1 schneidet. Zeichnen Sie diese Situation und finden Sie eine **Gleichung** für den Wert von x_0.