F2 Mathematik **Vordiplom**

Dr. Andreas Stahel
HTA Biel
22. September 1999, 8:00 – 11:00

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

Calculer les expressions suivantes

$$
\begin{aligned}
A &= \mathcal{L}[t-1+\cos(3t)](s) \\
B &= \mathcal{L}[t^3\, U(t-2)]\,(s) \\
C &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{(s-2)^2}-\frac{e^{-4s}}{s-2}]\,(t) \\
D &= \iint\limits_K x^3\, dA
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= \iint\limits_K \nabla \begin{pmatrix} x^4-y \\ \sinh x^3 \end{pmatrix} dA \\
F &= \oint_{\partial K} \begin{pmatrix} y\,\sin x \\ -\frac{1}{2}y^2\,\cos x \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\, ds
\end{aligned}
$$

In den Resultaten D, E und F ist K das Rechteck $0 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 1$. Die Kurve ∂K ist der Rand von K.

Pour les résultats D, E et F prendre comme K le rectangle $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 1$. La courbe ∂K est le bord de K.

Aufgabe 2:

Examiner la fonction $f(x,y,z) = z$ et calculer le triple intégral sur la domaine dans le premier octant limitée par $x = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $x + 2y = 6$ et le cylindre $x^2 + z^2 = 4$.
Tip: designer d'abord

Berechnen Sie das Dreifachintegral der Funktion $f(x,y,z) = z$ über den Bereich im ersten Oktanten, beschränkt durch $x = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $x + 2y = 6$ und den Zylinder $x^2 + z^2 = 4$.
Tipp: zuerst zeichnen

Aufgabe 3:

Pour déterminer le module d'élasticité d'un fil on mesure la longueur l et le diamètre d. Une force F allonge le fil par un changement de longueur δ. On trouve

Um das Elastizitätsmodul eines Drahtes zu bestimmen, misst man dessen Länge l und den Durchmesser d. Durch eine am Draht angreigende Kraft F ergib sich eine Längenänderung δ. Es gilt

$$
\begin{aligned}
l &= 2473 \pm 3 \quad \text{mm} \\
d &= 0.292 \pm 0.001 \quad \text{mm} \\
F &= 0.1 \pm 0.005 \quad \text{N} \\
\delta &= 1.750 \pm 0.05 \quad \text{mm}
\end{aligned}
$$

Le module d'élasticité est déterminé par

Das Elastizitätsmodul E ist bestimmt durch

$$F \cdot l = \pi \cdot E \left(\frac{d}{2}\right)^2 \delta$$

Trouver E et les erreurs absolu et relative à l'aide d'une approximation linéaire.

Bestimmen Sie E und die zugehörigen absoluten und relativen Fehler mit Hilfe einer linearen Approximation.

Aufgabe 4:

Die Tiefe eines Sees, dessen Fläche ein Gebiet D der xy–Ebene einnimmt ist beim Punkt (x, y) gegeben durch

La profondeur en un point (x, y) d'un lac dont la surface occupe une région D du plan des xy est donnée par

$$z = f(x, y) = 300 - 2\,x^2 - y^2$$

Hier besitzen x und y die Einheit Kilometer und z die Einheit Meter. Die Uferlinie ist beschrieben durch die Gleichung $f(x, y) = 0$.

où x, y sont mesurés en kilomètres et z en mètres. Le bord du lac est donc définie par l'équation $f(x, y) = 0$.

(a) Ein Boot befindet sich beim Punkt $P = (4, 8)$. In welche Richtung $\vec{a}$ muss es fahren, damit die Tiefe **möglichst rasch zunimmt**?

(a) Un bateau se trouve au point $P = (4, 8)$. Dans quelle direction $\vec{a}$ doit il naviguer de manière à ce que la profondeur de l'eau **augmonte le plus rapidement**?

(b) Der Kapitän des Schiffes wählt den Kurs so, dass in jedem Punkt die Richtung identisch ist mit der Richtung der stärksten Tiefenzunahme. Hier sind g_1 und g_2 die Komponenten des Vektors $\vec{g}$. Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Fahrkurve, wenn sich das Schiff zum Zeitpunkt $t = 0$ beim Punkt $(2, 5)$ befand.

(b) Le capitaine du bateau choisit le cap de telle manière que la direction soit toujours identique avec la direction de la plus grande augmontation de la profondeur. Ici g_1 et g_2 sont des composantes du vecteur $\vec{g}$. Déterminer la représentation paramétrique de la trajectoire du bateau, si celui–ci se trouve au point $(2, 5)$ à l'instant $t = 0$.

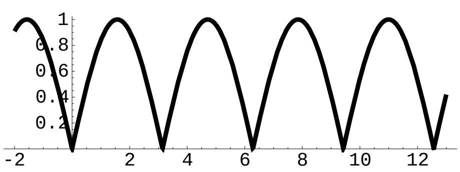
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,x(t) &= g_1(x, y) \\ \frac{d}{dt}\,y(t) &= g_2(x, y) \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Die Fourierreihe der Funktion $f(t) = |\sin t|$ ist gegeben durch

La série de Fourier de la fonction $f(t) = |\sin t|$ est donnée par

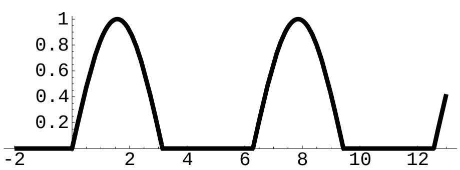
$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5\cdot 7} + \ldots\right) \\ &= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\,i\,k\,t}}{4\,k^2 - 1} \end{aligned}$$



Der Graph der Funktion $h(t)$ ist rechts gezeigt.

$$h(t) = \frac{1}{2}\,(\sin t + |\sin t|)$$

A droite trouver le graphe de la fonction $h(t)$.



(a) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe der Funktion $g(t) = |\cos t|$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion $h(t)$.

(c) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe der untenstehenden Funktion $u(t)$.

(a) Trouver la série de Fourier complexe de la fonction $g(t) = |\cos t|$.

(b) Trouver la série de Fourier réelle de la fonction $h(t)$.

(c) Trouver la série de Fourier complexe de la fonction $u(t)$ ci–dessous.