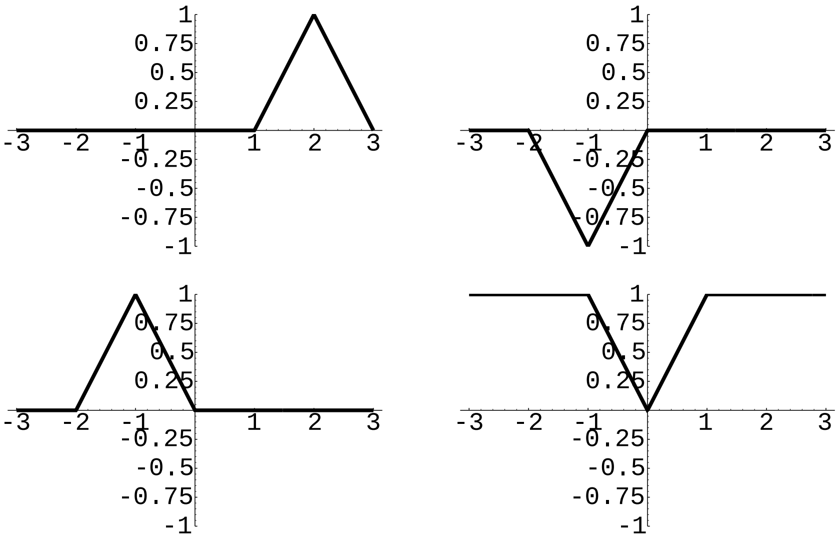
F2 Mathematik/Mathématique **Prüfung/Épreuve 4**

Dr. A. Stahel 13.7.1999

Aufgabe / Problème 1:

Unten sehen Sie die Graphen von vier Funktionen. Somit gibt es insgesamt 6 Korrelationskoeffizienten dieser Funktionen. Entscheiden Sie welcher Koeffizient der grösste sein wird und berechnen Sie ihn exakt.

Ci–dessous trouver les graphes de quatres fonctions. Donc il y a 6 coefficients de corrélation pour ces fonctions. Décider lequel sera le plus grand et calculer le valeur exact de ce coefficient.



Lösung/Solution: Werden die Funktionen numeriert durch f_1, f_2, f_3 und f_4 von oben links nach unten rechts, so können einige Korrelationskoeffizienten leicht angegeben werden

- f_1 mit f_2 und f_1 mit f_3 : Korrelationskoeffizienten Null, da das Produkt der beiden Funktionen Null ist.
- Wegen $f_2 = -f_3$ ist der Korrelationskoeffizient dieser beiden Funktionen -1 .
- Der Korrelationskoeffizient von f_2 mit f_4 ist negativ, da die beiden Funktionen verschiedene Vorzeichen haben.
- Für den maximalen Wert kommen nur die Kombinationen f_1 mit f_4 und f_3 mit f_4 in Frage. Wegen $\|f_1\|_2 = \|f_3\|_2$ müssen nur die beiden Integrale
$$\int_{-3}^{3} f_1(x) \cdot f_4(x)\; dx \quad \text{und} \quad \int_{-3}^{3} f_3(x) \cdot f_4(x)\; dx$$
verglichen werden. Da die Funktion f_4 in Bereich $1 < x < 3$ grösser ist als im Bereich $-2 < x < 0$ wird der grösste Korellationskoeffizient mit f_1 und f_4 erreicht.

Nun zu den Rechnungen

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_2^2 &= \int_{-3}^{3} f_1(x)^2\; dx = 2 \int_0^1 x^2\; dx = \frac{2}{3} \\
\|f_4\|_2^2 &= \int_{-3}^{3} f_4(x)^2\; dx \\
&= \int_{-3}^{-1} 1\; dx + \int_{-1}^{0} (-x)^2\; dx + \int_0^x x^2\; dx + \int_1^3 1\; dx \\
&= 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{14}{3} \\
\langle f_1 \,,\, f_4 \rangle &= \int_{-3}^{3} f_1(x) \cdot f_4(x)\; dx = \int_1^3 f_1(x)\; dx = 1
\end{aligned}$$

Somit ist

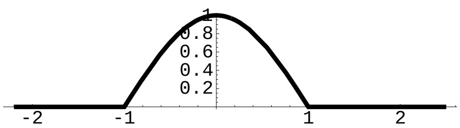
$$\frac{\langle f_1\, ,\, f_4\rangle}{\|f_1\|_2\,\|f_4\|_2}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}}=\frac{3}{2\,\sqrt{7}}=\frac{3\,\sqrt{7}}{14}\approx 0.567$$

Aufgabe / Problème 2:

Untersuchen Sie Fensterfunktionen auf dem festen Intervall $[-\pi, \pi]$. Das Fenster besteht aus einem Bogen einer Cosinus–Funktion der Breite $2\,\alpha$. Die Periode ist immer $2\,\pi$. Der Fall $\alpha = 1$ ist unten gezeigt. Die Fourierkoeffizienten für $\alpha = 1$ sind

Examiner des fonctions de fenêtre sur l'intervalle fixe $[-\pi, \pi]$. La fenêtre est donnée par un boucle d'une fonction cosinus de largeur $2\,\alpha$. La période est $2\,\pi$. Voir la situation pour $\alpha = 1$ ci–dessous. Les coefficients de Fourier pour $\alpha = 1$ sont

$$c_n=\frac{2\,\cos n}{\pi^2-4\,n^2}$$



(a) Finden Sie das Integral, um die obigen Koeffizienten c_n zu bestimmen, d.h. $\alpha = 1$.

(b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten für beliebige Werte von $\alpha > 1$.

(c) Finden Sie die komplexe Fourierreihe für den Fall $\alpha = 2$.

(a) Donner l'intégral pour calculer les coefficients ci–dessus, veut–dire pour $\alpha = 1$.

(b) Trouver les coefficient de Fourier pour des valeurs arbitraires de $\alpha > 1$.

(c) Donner la série de Fourier complexe pour le cas $\alpha = 2$.

Lösung/Solution:

(a) Die Funktion $f(x)$ ist nur auf dem Intervall $-1 < x < 1$ von Null verschieden. Dort ist sie gegeben durch $f(x) = \cos(x\,\frac{\pi}{2})$. Somit erhält man

$$c_n=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-1}^{1}\cos(x\,\frac{\pi}{2})\,e^{-i\,n\,x}\,dx=\frac{2\,\cos n}{\pi^2-4\,n^2}$$

(b) Nun ist die Funktion $g(x) = \cos(x\,\frac{\pi}{2\,\alpha}) = f(x/\alpha)$ ist auf dem Intervall $-\alpha < x < \alpha$ von Null verschieden

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx\\
&= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos(x\,\frac{\pi}{2\,\alpha})\,e^{-i\,n\,x}\,dx\\
&\qquad \text{Substitution}\quad s=x/\alpha\\
&= \frac{\alpha}{2\,\pi}\int_{-1}^{1}\cos(s\,\frac{\pi}{2})\,e^{-i\,n\,\alpha\,x}\,ds\\
&= \alpha\,\frac{2\,\cos(n\,\alpha)}{\pi^2-4\,\alpha^2 n^2}
\end{aligned}$$

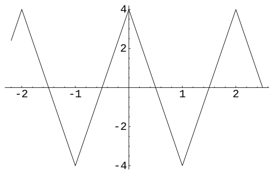
Die Berechnung des letzten Integrals stimmt mit dem Integral für c_n fast überein. Für die Schlussformel kann in der gegebenen Formel für c_n der Term n durch $n\,\alpha$ ersetzt werden.

(c) Setze $\alpha = 2$ in der allgemeinen Formel für eine komplexe Fourierreihe.

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4\,\cos(2\,\alpha)}{\pi^2-16\,n^2}\,e^{-i\,n\,x}$$

Aufgabe / Problème 3:

Die Fourierreihe der rechtsstehenden 2–periodischen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch
La série de Fourier de la fonction à droite est donné par



$$f(x) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\,x\,\pi)}{(2k+1)^2}$$

(a) Finden Sie die komplexen Koeffizienten c_7, c_8 und c_{-17}.

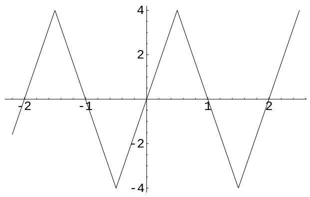
(b) Finden Sie die Fourierreihe der unten links stehenden Funktion $g(x)$.

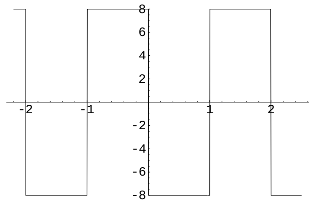
(c) Finden Sie die Fourierreihe der unten rechts stehenden Funktion $h(x)$.

(a) Trouver les coefficients c_7, c_8 et c_{-17} de la série de Fourier complexe.

(b) Trouver la série de Fourier de la fonction $g(x)$ ci–dessous à gauche.

(c) Trouver la série de Fourier de la fonction $h(x)$ ci–dessous à droite.





Lösung/Solution:

(a) Da die Funktion gerade ist gilt sicher $b_n = 0$ und in der gegebenen Formel liest man ab, dass $a_n = 0$ falls n gerade und $a_n = \frac{32}{\pi^2\,n^2}$ falls n ungerade. Wegen $2\,c_n = a_n - i\,b_n$ gilt

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{16}{\pi^2\,n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Somit ist $c_7 = \frac{16}{\pi^2\,49}$, $c_8 = 0$ und $c_7 = \frac{16}{\pi^2\,17^2}$.

(b) Die Funktion entsteht durch eine Verschiebung um $1/2$ nach links der gegebenen Funktion. Somit sind die neuen Fourierkoeffizienten

$$e^{i\,n\,\pi\,\frac{1}{2}}\,c_n$$

und

$$f(x-1/2) = g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\,n\,\pi\,\frac{1}{2}}\,c_n\,e^{i\,n\,\pi\,x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n\,c_n\,e^{i\,n\,\pi\,x}$$

Da nur Koeffizienten c_n mit ungeradem Index von Null verschieden sind kann dies umgeschrieben werden zu (verwende $(-i)^{2k+1} = -i \cdot i^{2k} = i\,(-1)^{k+1}$)

$$f(x-1/2) = g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} i\,(-1)^{k+1}\,c_{2k+1}\,e^{i\,(2k+1)\,\pi\,x}$$

Die reelle Fourierreihe ist etwas schwieriger zu konstruieren. Man könnte mit der ursprünglichen Formel starten und erhält

$$\begin{aligned} f(x-\frac{1}{2}) &= \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\,(x-1/2)\,\pi)}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\,x\,\pi - k\,\pi - \pi/2)}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\,x\,\pi - k\,\pi)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin((2k+1)\,x\,\pi)}{(2k+1)^2}$$

(c) Die Funktion h ist die Ableitung der Funktion f und die Fourierreihe von $h(x)$ konvergiert überall, ausser bei den Sprungstellen. Somit

$$h(x) \sim \frac{-32}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\,x\,\pi)}{2k+1}$$

Aufgabe / Problème 4:

Untersuchen Sie das Randwertproblem

Examiner l'équation différentielle

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Für $f(x) = \sin(n\pi x)$ ist die Lösung gegeben durch

Pour $f(x) = \sin(n\pi x)$ la solution est donné par

$$u(x) = \frac{-1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi\, x)$$

Finden Sie die Lösung der Gleichung für die Funktion $f(x) = 1$ mit Hilfe von Fourierreihen.
Tipp: zuerst Funktion f geeignet erweitern.

Trouver la solution de l'équation pour la fonction $f(x) = 1$ à l'aide des séries de Fourier.
Tip: d'abord considérer une extension de f

Lösung/Solution: Falls $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi\, x)$ ist die Gleichung gelöst durch

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n}{n^2\pi^2} \sin(n\pi\, x)$$

Somit ist eine Fourier–Sinus–Reihe der Funktion $f(x) = 1$ auf dem Intervall gesucht.

Die Funktion $f(x)$ muss zuerst **ungerade** erweitert werden auf das Intervall $-1 < x < 1$. Die Fourierkoeffizienten $a_n = 0$ verschwinden. Die Werte von b_n sind gegeben durch

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\ \sin(n\pi\, x)\ dx = 2 \int_0^1 \sin(n\pi\, x)\ dx \\ &= 2\, \frac{-\cos(n\pi\, x)}{n\,\pi} \Big|_0^1 = \frac{-2}{n\,\pi}\ (\cos(n\pi) - 1) = \frac{2}{n\,\pi}\ (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(1\pi\, x)}{1} + \frac{\sin(3\pi\, x)}{3} + \frac{\sin(5\pi\, x)}{5} + \frac{\sin(7\pi\, x)}{7} + \ldots \right)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$u(x) = \frac{-4}{\pi} \left(\frac{\sin(1\pi\, x)}{1\,\pi^2} + \frac{\sin(3\pi\, x)}{3^3\,\pi^2} + \frac{\sin(5\pi\, x)}{5^3\,\pi^2} + \frac{\sin(7\pi\, x)}{7^3\,\pi^2} + \ldots \right)$$

oder mit formal korrekter Notation

$$u(x) = \frac{-4}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi\, x)}{(2k-1)^3}$$
