F2 Mathematik/Mathématique **Prüfung/Épreuve 2**

Dr. A. Stahel 24.3.1998

Aufgabe / Problème 1:

Examiner l'intégral

Untersuchen Sie das Integral

$$I = \iint\limits_G x\, dA = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} x\, dx\, dy$$

(a) Esquisser la domaine d'intégration G.

(b) Changer l'ordre d'intégration.

(c) Calculer l'intégral.

(a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich G.

(b) Ändern Sie die Integrationsreihenfolge.

(c) Berechnen Sie das Integral.

Lösung/Solution:

(a) Ein Bogen unter der Kurve $y = \sin x$, wobei $0 \leq x \leq \pi$.

(b)

$$I = \iint\limits_G x\, dA = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} x\, dx\, dy = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} x\, dy\, dx$$

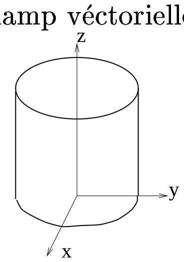
(c)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \int_0^{\sin x} x\, dy\, dx \\ &= \int_0^\pi x\, y \Big|_{y=0}^{\sin x} dx \\ &= \int_0^\pi x\, \sin\, x\, dx = \pi \end{aligned}$$

Aufgabe / Problème 2:

Untersuchen Sie das Vektorfeld

Examiner le champ véctorielle



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ e^{x^2+y^2} - e \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Das Integrationsgebiet G im Raum $\mathbb{R}^3$ ist ein Zylinder, beschränkt durch die Flächen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ und $z = 1$. Berechnen Sie das untenstehende Integral.
Tip: es ist nicht notwendig langwierige Rechnungen auszuführen.

La domaine d'intégration G en $\mathbb{R}^3$ est un cylindre borné par les surfaces $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$ et $z = 1$. Calculer l'intégral ci–desous.
Tip: pas nécessaire de faire des calculations très longes.

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$

Lösung/Solution: Mit Hilfe des Divergenzsatzes kann dieses Integral umgeformt werden in ein Oberflächenintegral.

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint\limits_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$$

Dieses besteht aus drei Teilen.

1. Zylinderwand ($x^2 + y^2 = 1$): Hier gilt

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

   Dieses Vektorfeld zeigt in die z–Richtung und somit ist die Normalkomponente 0. Der Integralbeitrag ist 0.

2. Boden ($z = 0$): Hier ist die äussere Normale gegeben durch $\vec{n} = (0, 0, -1)$ und somit $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$. Der Integralbeitrag ist 0.

3. Deckel ($z = 1$): Hier ist die äussere Normale gegeben durch $\vec{n} = (0, 0, 1)$ und somit $\vec{F} \cdot \vec{n} = z^2 = 1$. Der Integralbeitrag ist gleich der Fläche des Kreises, d.h. π.

Somit gilt

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint\limits_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = 0 + 0 + \pi = \pi$$

Es ist möglich die Divergenz auszurechenen und das Dreifach-Integal direkt auszurechnen. Die Rechnungen sind länger.

Aufgabe / Problème 3:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$y'''(x) + 2\,y''(x) - 5\,y'(x) - 6\,y(x) = 1 \quad \text{mit/avec} \quad y''(0) = K \quad , \quad y'(0) = y(0) = 0$$

(a) Finden Sie die exakte Lösung dieser Gleichung.

(b) Es gibt genau einen Wert der Konstanten K, sodass die Lösung beschränkt bleibt für $t \to \infty$. Bestimmen Sie diesen Wert von K.

(a) Trouver la solution exacte de cette équation.

(b) Il y a un seul valeur de la constante K tel que la solution reste borné pour $t \to \infty$. Trouver ce valeur de K.

Lösung/Solution:

(a) Dieses Problem kann mittels einer Partialbruchzerlegung gelöst werden.

$$\begin{aligned}
Y\,(s^3 + 2\,s^2 - 5\,s - 6) &= \frac{1}{s} + K = \frac{1 + s\,K}{s} \\
Y &= \frac{1}{s} + K = \frac{1 + s\,K}{s\,(s^3 + 2\,s^2 - 5\,s - 6)} \\
&= \frac{1 + s\,K}{s\,(s-2)\,(s+3)\,(s+1)} \\
&= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s+1}
\end{aligned}$$

Somit ist die zu lösende Gleichung

$$1+K\,s = A\,(s-2)\,(s+3)\,(s+1)+B\,s\,(s+3)\,(s+1)+C\,s\,(s-2)\,(s+1)+D\,s\,(s-2)\,(s+3)$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen können nacheinander verschiedene Werte von s eingesetz werden

$$\begin{array}{rlrcl} s=0 & \text{ergibt} & 1 & = & -6\,A \\ s=2 & \text{ergibt} & 1+2\,K & = & 30\,B \\ s=-3 & \text{ergibt} & 1-3\,K & = & -30\,C \\ s=-1 & \text{ergibt} & 1-K & = & 6\,D \end{array}$$

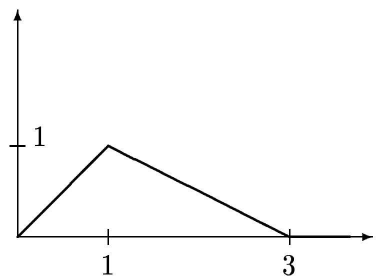
Somit ist

$$\begin{aligned} Y\,(s) &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+3}+\frac{D}{s+1} \\ &= \frac{-1}{6}\,\frac{1}{s}+\frac{1+2\,K}{30}\,\frac{1}{s-2}+\frac{3\,K-1}{30}\,\frac{1}{s+3}+\frac{1-K}{6}\,\frac{1}{s+1} \\ y\,(t) &= \frac{-1}{6}+\frac{1+2\,K}{30}\,e^{2\,t}+\frac{3\,K-1}{30}\,e^{-3\,t}+\frac{1-K}{6}\,e^{-t} \end{aligned}$$

(b) In der obigen Formel konvergiert der Anteil e^{2t} gegen unendlich. Damit die Lösung beschränkt bleibt, muss der entsprechende Koeffizient verschwinden. Somit ist der gesuchte Wert $K=-1/2$.

Aufgabe / Problème 4:

Untersuchen Sie die rechts gezeigte Funktion $f(t)$.



(a) Schreiben Sie die Laplacetransformation $F(s)$ als Summe von zwei bestimmten Integralen. Die Integrale sind **nicht zu berechnen**.

(b) Schreiben Sie $f(t)$ mit Hilfe der Schrittfunktion von Heaviside.

(c) Bestimmen Sie $F(s)$.

Examiner la function $f(t)$ ci–dessus.

(a) Écrire la transformation de Laplace $F(s)$ comme somme de deux intégrals definit. **Ne calculer pas** les intégrals.

(b) Écrire la fonction $f(t)$ à l'aide des fonctions de Heaviside.

(c) Trouver $F(s)$.

Lösung/Solution:

(a)

$$F\,(s) = \int_0^1 te^{-s\,t}\,dt + \int_1^3 \frac{3-t}{2}e^{-s\,t}\,dt$$

(b)

$$\begin{aligned} f\,(t) &= t\,(1-U(t-1)) + \frac{3-t}{2}\,(U(t-1)-U(t-3)) \\ &= t+\frac{3-3\,t}{2}\,U(t-1)-\frac{3-t}{2}\,U(t-3) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(t) &= t + \frac{3}{2}(t-1)\,U(t-1) + \frac{1}{2}(t-3)\,U(t-3) \\ F(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{3}{2\,s^2}\,e^{-s} + \frac{1}{2\,s^2}\,e^{-3\,s} \end{aligned}$$

Aufgabe / Problème 5:

Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

Considerer le système des équations différentielles

$$\begin{array}{cccc} \dot{x} & -x & -5\,y & = & f(t) \\ \dot{y} & +x & +k\,y & = & 0 \end{array}$$

als System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $y(t)$.

comme système avec fonction d'entré $f(t)$ et fonction de sortie $y(t)$.

(a) Zu bestimmen ist die Transferfunktion $G(s)$.

(b) Für welchen Bereich von k ist dieses System stabil?

(a) Trouver la fonction de transfert $G(s)$.

(b) Pour quel domain de k ce système est-il stable?

Lösung/Solution: Die Anfangswerte können 0 gewählt werden, dadurch werden die Rechnungen vereinfacht.

$$\begin{array}{ccccc} (s-1)\,X & - & 5\,Y & = & F \\ X & + & (s+k)\,Y & = & 0 \end{array}$$

(a) In diesem System kann X eliminiert werden. Man erhält

$$\begin{aligned} ((s+k)(s-1)+5)\;Y &= F \\ Y &= \frac{1}{s^2+(k-1)\,s-k+5}\;F \end{aligned}$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$G(s) = \frac{1}{s^2+(k-1)\,s-k+5}$$

(b) Damit das System stabil ist müssen alle Nullstellen des Nenners negativen Realteil haben. Das ist erfüllt falls $(k-1) > 0$ und $(-k+5) > 0$. Somit ist die Bedingung

$$1 < k < 5$$

hinreichend.
