Aufgabe / Problème 1:

Untersuchen Sie 2π–periodische Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung für verschiedene Funktionen $f(t)$.

Examiner des solution avec période 2π de l'équation différentielle pour des fonctions $f(t)$ différentes.

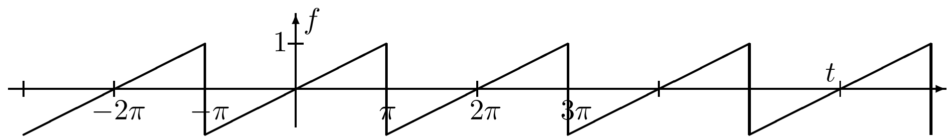
$$\ddot{y}(t) + 2\,\dot{y}(t) + 49\,y(t) = f(t)$$

(a) Falls $f(t) = e^{i\,n\,t}$ so gibt es eine 2π–periodische Lösung der Form $y_n(t) = K_n\,e^{i\,n\,t}$. Bestimmen Sie $K_n \in \mathbb{C}$.

(b) Stellen Sie $y(t)$ als geeignete Reihe dar, falls die 2π–periodische Funktion $f(t)$ durch den untenstehenden Graphen gegeben ist.

(a) Pour $f(t) = e^{i\,n\,t}$ il existe une solution de avec période 2π de la forme $y_n(t) = K_n\,e^{i\,n\,t}$. Trouver $K_n \in \mathbb{C}$.

(b) Écrire $y(t)$ comme série adaptée si la fonction périodique f est donnée par le graphe ci–dessous.



Aufgabe / Problème 2:

Ein Ingenieur muss in einen Analogsignal die Amplituden der Beiträge mit 100 kHz und 100.1 kHz möglichst effizient bestimmen. Er misst das Signal während 0.01 Sekunden zu 2'000 gleichmässig verteilten Zeitpunkten. Dann wendet er den Befehl `fft()` an. Er kommt zu keinem brauchbaren Resultat.

Un ingénieur analyse un signal analogique. Il doit déterminer les amplitudes des contributions avec des fréquences 100 kHz et 100.1 kHz d'une façon efficace. Il mesure le signal pendant 0.01 seconde pour 2'000 temps uniformément distribués, puis il utilise la commande `fft()`. Il arrive pas à un résultat utilisable.

(a) Was muss er ändern?

(b) Beschreiben Sie ein Vorgehen welches gute Resultate liefern kann und auch möglichst effizient ist. Begründen Sie die Modifikationen.

(c) Welche Koeffizienten c_n (mit Ihrem Vorgehen) muss er bestimmen um die gewünschten Amplituden abzulesen.

(a) Que doit-il modifier ?

(b) Décrivez une procédure qui peut donner des bons résultats et qui est aussi efficace. Justifiez les modifications.

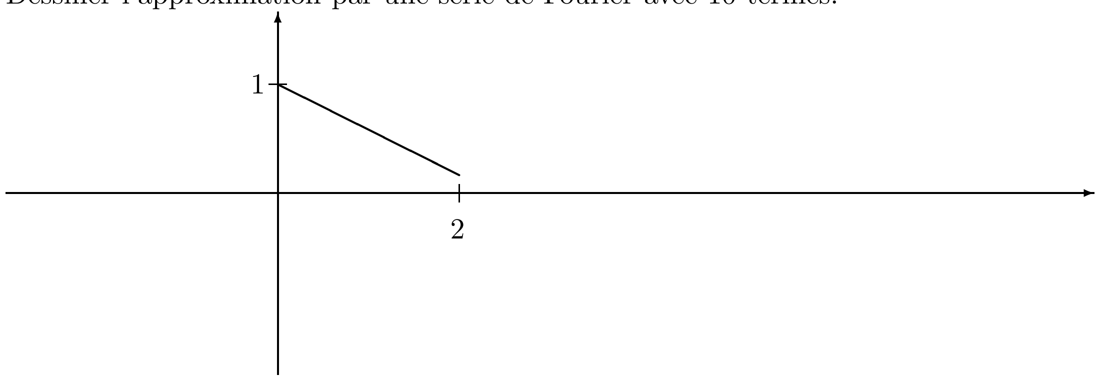
(c) Lesquelles des coefficients (avec votre procedure) c_n doit-il calculer pour obtenir les amplitudes des signaux avec les fréquences choisit.

Aufgabe / Problème 3:

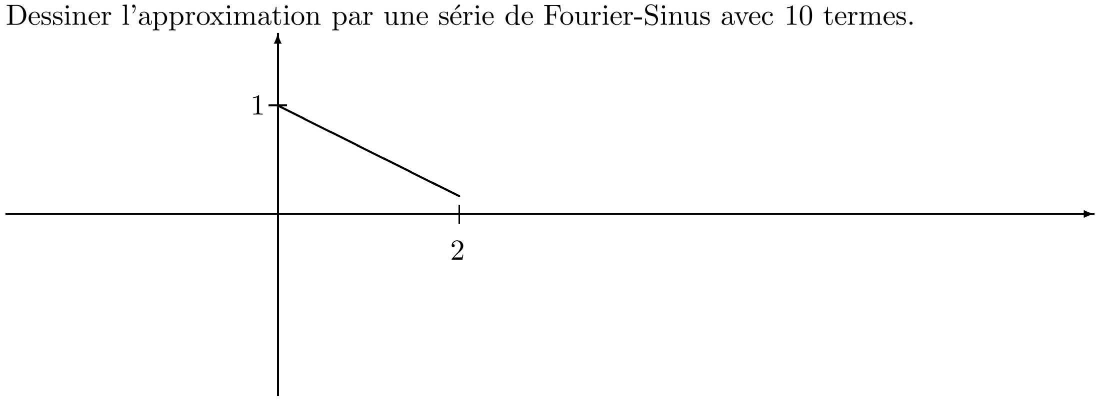
Eine Funktion auf dem Intervall $[0,2]$ ist gegeben durch die untenstehenden Graphen. Es gilt $f(t) = 1 - 0.45\,t$.

Une fonction sur l'intervalle $[0,2]$ et donnée par les graphes ci–dessous. On sait que $f(t) = 1 - 0.45\,t$.

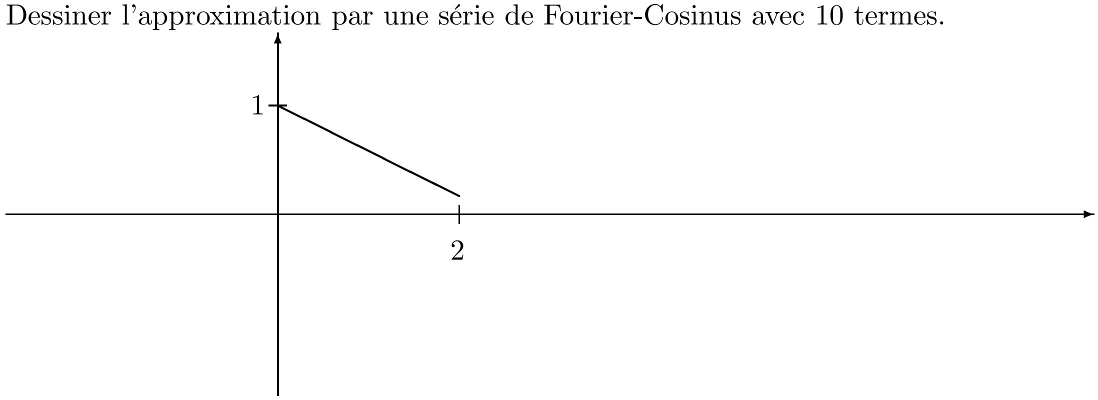
(a) Skizzieren Sie die Approximation durch eine Fourierreihe mit 10 Termen.
Dessiner l'approximation par une série de Fourier avec 10 termes.



(b) Skizzieren Sie die Approximation durch eine Fourier–Sinus–Reihe mit 10 Termen.
Dessiner l'approximation par une série de Fourier-Sinus avec 10 termes.



(c) Skizzieren Sie die Approximation durch eine Fourier–Cosinus–Reihe mit 10 Termen.
Dessiner l'approximation par une série de Fourier-Cosinus avec 10 termes.



(d) Finden Sie den Koeffizienten c_0 der Fourierreihe. (ohne lange Rechnung!)
Trouver le coefficient c_0 de la série de Fourier. (sans calcul long!)

Aufgabe / Problème 4:

Ein Signal wurde während $T = 0.1$ Sekunden an $N = 2^{10} = 1024$ Punkten regelmässig gemessen. Auf die Werte wurde der Befehl `fft()` angewandt und der Betrag der ersten 50 Koeffizienten ($|c_n|$ für $0 \leq n \leq 49$) ist unten gezeigt. Das Signal enthält zwei dominierende Beiträge mit festen Frequenzen.

(a) Bestimmen Sie die beiden Frequenzen möglichst genau.

(b) Welche maximale Frequenz kann mit der obigen Konfiguration untersucht werden?

(c) Ersetzen Sie auf der horizontalen Achse die Nummerierung n durch eine Frequenzskala (Einheit Hz).

(d) Das selbe Signal wird noch einmal gemessen, mit $T = 0.5$ und $n = 2^{14} = 16384$. Skizzieren Sie in der untenstehenden Graphik das zu erwartende Spektrum. Verwenden Sie ihre Frequenzskala der vorangehenden Teilaufgabe.

On mesure un signal pendant $T = 0.1$ secondes avec $N = 2^{10} = 1024$ points. Avec ces valeurs on appelle la commande `fft()` et puis on affiche les valeurs absolus des premiers 50 coefficients ($|c_n|$ pour $0 \leq n \leq 49$). On arrive à la graphique ci–dessous. Le signal est composé de deux contributions avec des fréquences fixes.

(a) Déterminer les deux fréquence les plus précis possible.

(b) Quel fréquence maximal peut on examiner avec la configuration ci–dessus?

(c) Pour l'axe horizontal remplacer la numérotation par n avec une échelle des fréquences (unité Hz).

(d) Réexaminer le signal identique avec $T = 0.5$ et $n = 2^{14} = 16384$ points. Esquisser le spectre dans la graphique ci–dessous. Utiliser l'échelle des fréquence de la question précédente.