F2 Mathematik/Mathématique **Prüfung/Épreuve 1**

Dr. A. Stahel 11.1.2006

Aufgabe / Problème 1:

Finden Sie die exakten, allgemeinen Lösungen der folgenden Differntialgleichungen. Die Rechnungen sind zu zeigen.

Trouver les solutions générals, exactes des équations différentielle suivantes. Montrer les calculations.

(a)

$$\ddot y(t) - 7\,\dot y(t) + 12\,y(t) = 0$$

(b)

$$\ddot y(t) - 4\,\dot y(t) + 12\,y(t) = e^{2\,t}$$

(c)

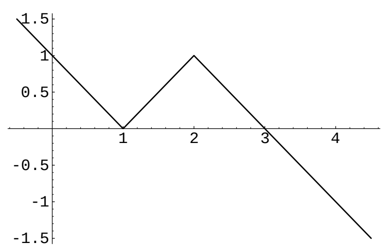
$$\dot y(t) = y^2(t)$$

Aufgabe / Problème 2:

Untersuchen Sie die untenstehende Differentialgleichung, wobei der Graph der Funktion $f(x)$ unten gezeigt ist.

Examiner l'équation différentielle avec la fonction $f(x)$ montrée ci–dessous.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,x(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$



(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $0 \le t \le 3$ und $0 \le x \le 4$.

(b) Skizzieren Sie die drei Lösungen mit den mit Anfangswerten $x_0 = 0.2$, $x_0 = 1.2$ und $x_0 = 3.8$.

(c) Bestimmen Sie den exakten Grenzwert $C = \lim_{t\to\infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0.2$ **graphisch**.

(d) Bestimmen Sie den exakten Grenzwert $D = \lim_{t\to\infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 1.2$ **graphisch**.

(a) Esquisser le champ vectoriel pour le domaine $0 \le t \le 3$ et $0 \le x \le 4$.

(b) Esquisser les trois solutions avec les valeurs initiales $x_0 = 0.2$, $x_0 = 1.2$ et $x_0 = 3.8$.

(c) Déterminer d'une façon exacte la limite $C = \lim_{t\to\infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 0.2$ en utilisant un argument **graphique**.

(d) Déterminer d'une façon exacte la limite $D = \lim_{t\to\infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 1.2$ en utilisant un argument **graphique**.

Aufgabe / Problème 3:

Die Differentialgleichung

$$E\,I\,y''(x) = -F\,y(x) \quad \text{für/pour} \quad 0 < x < L \quad \text{und/et} \quad y(0) = y(L) = 0$$

beschreibt die Biegelinie $y(x)$ eines horizontalen Stabes aus einem Material mit Elastizitätsmodul E und einem Querschnitt mit Flächenträgheitsmoment I. An einem Ende greift eine horizontale Kraft der Stärke F an.

La solution de l'équation différentielle donne le fléchissement $y(x)$ d'une poutre de module d'élasticité E et dont le moment d'inertie I de la séction est donné. A droite on applique une force F.

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

(a) Trouver la solution générale de l'équation différentielle avec la condition initiale $y(0) = 0$.

(b) Verwenden Sie die Bedingung $y(L) = 0$ um zu zeigen, dass für kleine Kräfte F die triviale Lösung $y(x) = 0$ die einzige Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Utiliser la condition $y(L) = 0$ pour montrer que la solution triviale $y(x) = 0$ est la seule solution possible, si la force F est petite.

(c) Es gibt eine kleinste Kraft F_0, bei welcher der Stab verbogen wird, d.h. es gibt eine von Null verschiedene Lösung. Berechnen Sie diese Kraft.

(c) Il existe une force minimale F_0, telle que la poutre peut flamber (une solution $y(x)$ différente de zéro). Trouver cette force.

(d) Wie gross ist die Kraft F in der Situation der obigen Figur?

(d) Trouver la force dans la situation de la figure ci–dessus.

Aufgabe / Problème 4:

Bestimmen Sie den Fluss A des Vektorfeldes $\vec{F}$ von unten durch die Halbkreiskurve bestimmt durch $x^2 + (y-1)^2 = 1$ und $y \geq 1$.
Tipp : Divergenzsatz

Calculer le flux total A du champ vectoriel $\vec{F}$ ci–dessous depius le bas au travers de la courbe demi cercle donné par $x^2+(y-1)^2 = 1$ et $y \geq 1$.
Tuyau: théorème de divergence

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2\,x\,y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$