F2 Mathematik / mathématique
Vordiplom / examen propédeutique

Dr. Andreas Stahel
HTI Biel
21. September 2005, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Untersuchen Sie das unten gezeigte Dreieck D in $\mathbb{R}^3$ mit den Ecken in der xz–Ebene.

(a) Rotieren Sie das Dreieck um die z–Achse und bestimmen Sie das entstehende Volumen V.

(b) Das Dreieck stelle eine dünne Platte dar, mit Massendichte ρ (Einheit [kg/m^2]). Diese Platte wird um die z Achse rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω. Finden und vereinfachen Sie eine Formel für die kinetische Energie E_z.

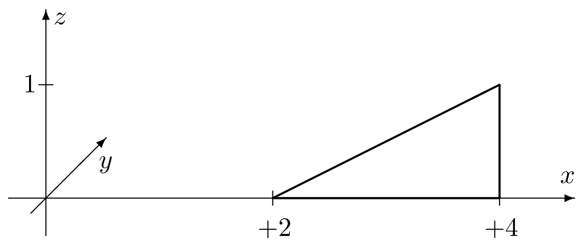
(c) Die Platte in (b) wird um die y–Achse rotiert. Berechnen Sie die kinetische Energie E_y als Doppelintegral.

Examiner le triangle D en $\mathbb{R}^3$ avec les coins dans le plan xz montré ci–dessous.

(a) Appliquer une rotation par rapport à l'axe z. Calculer le volume V .

(b) Le triangle représente une plaque mince avec densité de masse ρ (unité [kg/m^2]). On applique une rotations par rapport à l'axe z avec vitesse angulaire ω. Trouver et simplifier la formule pour l'énergie cinétique E_z.

(c) Réexaminer la plaque en (b). Une applique une rotation par rapport a l'axe y avec vitesse angulaire ω. Calculer l'énergie cinétique E_y à l'aide d'une double intégral.

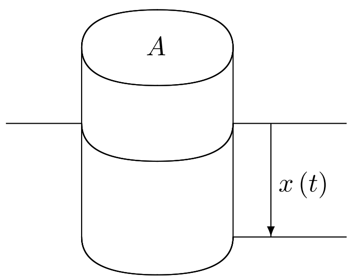


Aufgabe / problème 2:

Eine zylinderförmige Boje mit Masse m und Grundfläche A sinke um $x(t)$ ins Wasser ein. Dann gilt die untenstehnde Differentialgleichung. Hiebei ist ρ die Dichte von Wasser.

$$\begin{array}{cccc} \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} & = \text{Gewichtskraft} & + \text{Auftrieb} \\ m\,\ddot{x}(t) & = \quad m\,g & -\rho\,g\,A\,x(t) \\ \text{masse} \cdot \text{accélération} & = \text{gravitation} & + \text{portance} \end{array}$$

Une bouée cylindrique de masse m et avec une aire de base A s'enfonce dans l'eau de $x(t)$. L'équation différentielle ci–dessus donne la description de cette situation. La densité de l'eau est ρ .



(a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

(b) Eine Boje sinkt in Ruhe um h ins Wasser ein. Bestimmen Sie nun die Frequenz der auf und ab schwingenden Boje als Funktion von h.

(a) Trouver la solution générale de cette équation.

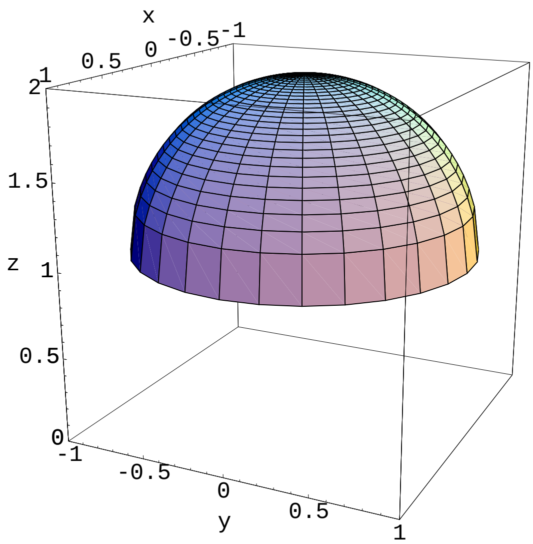
(b) Sans mouvement la bouée s'enfonce de h dans l'eau. Déterminer présent la fréquence avec laquelle la bouée oscille, comme fonction de h.

Aufgabe / problème 3:

Bestimmen Sie den Fluss A des Vektorfeldes $\vec{F}$ von unten durch die Halbkugeloberfläche bestimmt durch $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ und $z\geq 1$.
Tipp : Divergenzsatz

Calculer le flux total A du champ vectoriel $\vec{F}$ ci–dessous depius le bas au travers de la demi-sphère donné par $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ et $z\geq 1$.
Tuyau: théorème de divergence

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2\,x\,z \\ 2\,y\,z \\ x^2+y^2-2\,z^2 \end{pmatrix}$$



Aufgabe / problème 4:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$y^{(4)}(t) - 16\,y(t) = 3\,e^{2t} \quad \text{mit/avec} \quad y'''(0) = y''(0) = y'(0) = 0 \quad \text{und/et} \quad y(0) = 7$$

(a) Bestimmen Sie $Y(s)$ und die exakte **Form** der Partialbruchzerlegung von $Y(s)$.
Tipp: $(a^2-1) = (a+1)\,(a-1)$

(b) Geben Sie die exakte Form der Lösung $y(t)$ an. Die Koeffizienten sind **nicht** zu berechnen.

(c) Die Lösung besteht aus 5 Beiträgen. Bestimmen Sie den Beitrag, der am schnellsten divergiert, inklusive Koeffizient in der Partialbruchzerlegung.

(d) Bestimmen Sie ebenso den Beitrag der am schnellsten gegen 0 konvergiert.

(a) Trouver $Y(s)$ et la **forme** exacte de la décomposition en éléments fractions simples de $Y(s)$.
Tuyau: $(a^2-1) = (a+1)\,(a-1)$

(b) Donner la forme exacte de la solution $y(t)$. **Pas** besoin de calculer les coefficients.

(c) La solution est formée de 5 expressions simples. Déterminer le terme qui diverge le plus rapidement, y compris le coefficient de l'élément fractions simple.

(d) De la même façon trouver le terme qui tend le plus rapidement vers zéro.

Aufgabe / problème 5:

Ein Masse–Feder System mit Dämpfung ist beschrieben durch die Differentialgleichung

Un système masse–ressort est donné par l'équation différentielle

$$\ddot y(t) + \dot y(t) + 25\, y(t) = f(t)$$

Untersuchen Sie dieses System mit Input $f(t)$ und Output $y(t)$.

(a) Untersuchen Sie den Bode–Plot des Amplitudenfaktors für

- sehr grosse Werte von $s = i\,\omega$
- sehr kleine Werte von $s = i\,\omega$

um den Bode–Plot zu erstellen. Es sollten sich zwei Geraden ergeben, die den Plot gut approximieren werden. Skizzieren Sie diese beiden Geraden für den Bereich $0.1 < \omega < 100$.

(b) Der Wert ω_0 ist bestimmt durch den Schnittpunkt der beiden obigen Geraden. Bestimmen Sie den Wert der Transferfunktion $|G(i\,\omega_0)|$ für diese Frequenz und passen Sie den Bodeplot an.

(c) Der Bode–Plot der Phasenverschiebung ist unten rechts gezeigt. Verwenden Sie ihn und Ihr Resultat der obigen Teilaufgabe um den entsprechenden Nyquist–Plot zu erstellen.

Examiner ce système avec input $f(t)$ et output $y(t)$.

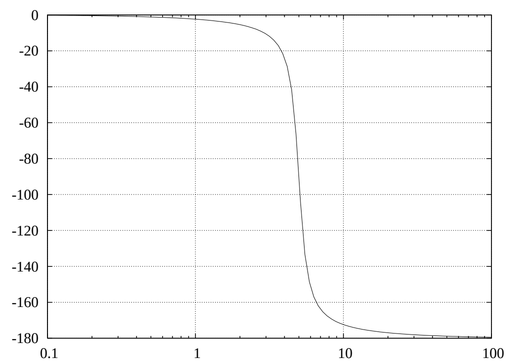
(a) Examiner le plot de Bode des amplitudes pour

- de très grandes valeurs de $s = i\,\omega$
- de très petites valeurs de $s = i\,\omega$

pour esquisser le plot de Bode. On doit obtenir deux droites qui donnant une bonne approximation du plot. Esquisser ces droites pour le domaine $0.1 < \omega < 100$.

(b) La valeur ω_0 est donnée par le point d'intersection des deux droites. Déterminer la valeur de la fonction de transfert $|G(i\,\omega_0)|$ pour cette fréquence et puis modifier le plot de Bode.

(c) Le plot de Bode du déphasage est montré ci–dessous. Utiliser ce plot et les résultats ci–dessus pour ésquisser le plot de Nyquist.



Aufgabe / problème 6:

Unten sehen Sie den Graphen Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $(-3, 3)$. Die Funktion ist periodisch mit Periode 6.

(a) Geben Sie möglichst einfache Formeln an um die Koeffizienten a_n und b_n der Fourier Reihe dieser Funktion zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie a_4, b_4 und c_4 möglichst effizient.

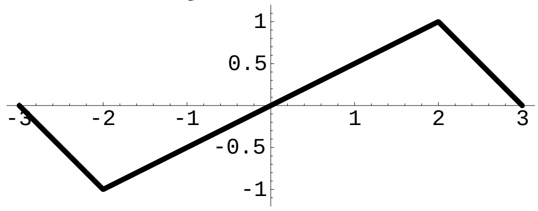
(c) Die neue Funktion $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ ist stückweise stetig mit Periode 6. Bestimmen Sie den komplexen Fourierkoeffizienten $\tilde{c}_4$ der Fourierreihen von $g(t)$ möglichst effizient.

Le graphe de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $(-3, 3)$ est montré ci–dessous. La fonction est périodique avec période 6 .

(a) Donner des formules le plus simple possible pour calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de cette fonction.

(b) Trouver les valeurs de a_4, b_4 et c_4 d'une façon efficace.

(c) La nouvelle fonction $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ est continue par morceau avec période 6 . Déterminer le coefficient de Fourier $\tilde{c}_4$ de cette fonction d'une façon efficace.



Aufgabe / problème 7:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$y''(x) = -k^2 \sin(y(x)) \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1$$

(a) Für kleine Werte von y kann die Gleichung vereinfacht werden durch $\sin y \approx y$. Bestimmen Sie die exakte Lösung der vereinfachten Gleichung.

(b) Schreiben Sie die ursprüngliche Gleichung als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

(c) Setzen Sie im Resultat von (b) $k = 1/2$ und verwenden Sie einen Schritt des Verfahrens von Runge–Kutta um $y(1)$ zu berechnen.

(d) Vergleichen Sie die Resultate von (a) und (c).

(a) Pour de petites valeurs de y on peut simplifier l'équation à l'aide de $\sin y \approx y$. Trouver la solution exacte de l'équation simplifiée.

(b) Récrire l'équation originale comme système des équations différentielles de l'ordre 1.

(c) Mettre $k = 1/2$ en (b) et appliquer un pas de la méthode de Runge–Kutta pour trouver $y(1)$.

(d) Comparer les résultats de (a) et (c).
