Aufgabe / Problème 1:

Ein Signal wurde während $T = 10$ Sekunde an $N = 2^{12} = 4096$ Punkten regelmässig gemessen. Auf die Werte wurde der Befehl `fft()` angewandt und der Betrag der ersten 100 Koeffizienten ($|c_n|$ für $0 \leq n \leq 99$) ist unten gezeigt. Das Signal enthält zwei dominierende Beiträge mit festen Frequenzen.

(a) Bestimmen Sie die beiden Frequenzen möglichst genau.

(b) Welche maximale Frequenz kann mit der obigen Konfiguration untersucht werden?

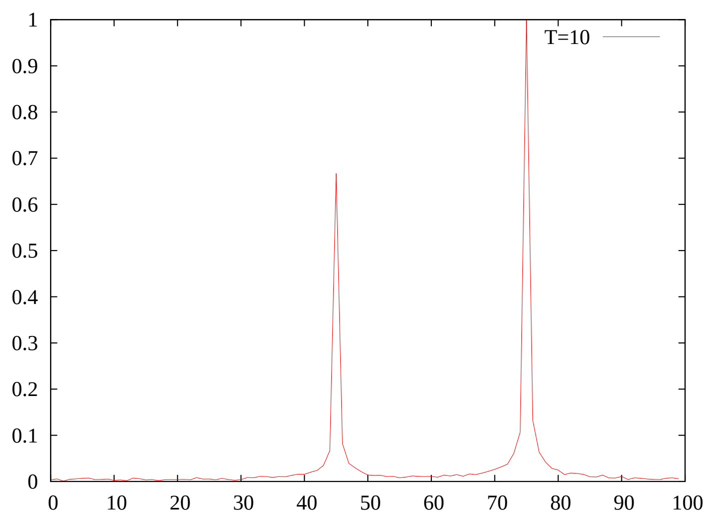
(c) Das selbe Signal wird noch einmal gemessen, mit $T = 5$ und $n = 2^{14} = 16384$. Skizzieren Sie in der untenstehenden Graphik das zu erwartende Spektrum. Welche maximale Frequenz können mit dieser Konfiguration erfasst werden?

On mesure un signal pendant $T = 10$ seconde avec $N = 2^{12} = 4096$ points. Avec ces valeurs on appelle la commande `fft()` et puis on affiche les valeurs absolus des premiers 100 coefficients ($|c_n|$ pour $0 \leq n \leq 99$). On arrive à la graphique ci–dessous. Le signal est compose de deux contributions avec des fréquences fixes.

(a) Déterminer les deux fréquence les plus précis possible.

(b) Quel fréquence maximal peut on examiner avec la configuration ci–dessus?

(c) Réexaminer le signal identique avec $T = 5$ et $n = 2^{14} = 16384$ points. Esquisser le spectre dans la graphique ci–dessous. Quel fréquence maximal peut on examiner avec cette nouvelle configuration?



Aufgabe / Problème 2:

Untersuchen Sie das Anfangswertproblem

Examiner l'équation différentielle

$$\frac{d\,y(x)}{dx} = x \cdot y(x) + 1 \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = 3$$

(a) Zu bestimmen sind die ersten Terme (bis und mit x^5) der Reihenentwicklung der Lösung $y(x)$.

(b) Bestimmen Sie $y(1)$ mit Hilfe der approximativen Lösung.

Tipp zur Kontrolle $y(1) \approx 6.36$.

(a) Trouver les premiers termes (y inclus le term x^5) de la série de Taylor de la solution $y(x)$.

(b) Calculer $y(1)$ à l'aide de l'approximation ci-dessus.

Tip pour controler $y(1) \approx 6.36$.

Aufgabe / Problème 3:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) - 4\,y(t) = 2 \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

(a) Schreiben Sie diese Gleichung um zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

(b) Berechnen Sie $y(0.5)$ mit Hilfe von zwei Schritten des Verfahrens von Euler.

(c) Berechnen Sie $y(0.5)$ mit Hilfe von einem Schritt des Verfahrens von Heun.

(a) Reécrire cette équation comme système des équations différentielles de l'ordre 1.

(b) Calculer $y(0.5)$ à l'aide de deux pas de la méthode de Euler.

(c) Calculer $y(0.5)$ à l'aide de un pas de la méthode de Heun.

Aufgabe / Problème 4:

Ein Differentialgleichungssystem wurde mit numerischen Verfahren von Runge–Kutta (RK) gelöst mit den folgenden Resultaten. Die Rechnung mit 400 Schritten benötigte 0.5 sec Rechenzeit.

Un système des équations différentielles est a résoudre avec la méthode numérique de Runge–Kutta (RK). Les calculations rends les résultats ci–dessus. La calculation á 400 pas utilise 0.5 sec de temps de calcul.

Anzahl Schritte nombre de pas	Resultat résultat
200	$y(30) = -0.241034139$
400	$y(30) = -0.243026980$

(a) Wie viele Schritte sind notwendig damit der Approximationsfehler kleiner als 10^{-8} wird.

(b) Wie lange wird diese Rechnung dauern um die obige Genauigkeit zu erreichen?

(a) Combien de pas sont nécessaire pour-que l'erreur d'approximation soit plus petit que 10^{-8}.

(b) Déterminer le temps de calcul pour arriver à cette précision.
