F2 Mathematik / mathématique
Vordiplom / examen propédeutique

Dr. Andreas Stahel
HTA Biel
15. September 2004, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Die Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ besteht aus einen Parabelstück von $(-1,1)$ zu $(1,1)$, durch den Ursprung. Betrachten Sie die Funktion

La courbe $C \subset \mathbb{R}^2$ consiste en un morceau de parabole du point $(-1,1)$ au point $(1,1)$ en passant par l'origine. Examiner la fonction

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,x \end{pmatrix}$$

$$A = \int_C \vec{F}(x,y) \cdot \vec{ds} \quad \text{und/et} \quad B = \int_C \|\vec{F}(x,y)\| \, ds$$

(a) Stellen Sie das bestimmte Integral für A auf. Anschliessend ist der exakte Wert von A zu bestimmen.

(b) Stellen Sie das bestimmte Integral für B auf. Anschliessend ist der exakte Wert von B zu bestimmen.

(a) Donner l'intégrale définie pour A puis trouver la valeur exacte de A.

(b) Donner l'intégrale définie pour B puis trouver la valeur exacte de B.

Aufgabe / problème 2:

Die Oberfläche S eines Zylinders lässt sich aus der Höhe h und dem Radius r gemäss der untenstehenden Formel bestimmen. Es wurde folgende Werte gemessen

La surface S d'un cylindre dépend de la hauteur h et du rayon r selon la formule ci–dessous. On a mesuré les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} S(h,r) &= 2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,h\,r \\ r &= 20.5 \pm 0.4 \ \text{ cm} \\ h &= 25.0 \pm 0.5 \ \text{ cm} \end{aligned}$$

Verwenden Sie lineare Approximationen um die folgenden Fragen zu beantworten.

(a) Wie gross ist die absolute Messunsicherheit der Oberfläche S?

(b) Wie gross ist die relative Messunsicherheit der Oberfläche S?

(c) Wie genau müssen h und r bestimmt werden, damit der relative Fehler von S kleiner als 1% ist?

Utiliser une approximation linéaire pour répondre aux questions suivantes:

(a) Quelle est l'incertitude de mesure absolue pour l'aire S?

(b) Quelle est l'incertitude de mesure relative pour l'aire S?

(c) Avec quelles tolérances doit-on mesurer h et r pour que l'erreur relative en S soit plus petite que 1% ?

Aufgabe / problème 3:

Examiner la fonction $f(x,y,z) = z$ et calculer la triple intégrale sur le domaine dans le premier octant limitée par $y = 0$, $z = 0$, $x+y = 2$, $x+2\,y = 6$ et le cylindre $y^2 + z^2 = 4$.
Tip: dessiner d'abord

Berechnen Sie das Dreifachintegral der Funktion $f(x,y,z) = z$ über den Bereich im ersten Oktanten, beschränkt durch $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $x + 2\,y = 6$ und den Zylinder $y^2 + z^2 = 4$.
Tipp: zuerst zeichnen

Aufgabe / problème 4:

Untersuchen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt}\,x(t) = -\sin(x(t)) \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = \pi/2$$

(a) Verwende Sie ein Vektorfeld um das Verhalten der Lösung auf dem Intervall $0 \leq t \leq 2$ zu skizzieren.

(b) Verwenden Sie Separation der Variablen um die exakte Lösung dieser Gleichung zu bestimmen.

(c) Verwenden Sie **einen Schritt** des Verfahrens von Runge–Kutta um den Wert der Lösung bei $t = 1$ zu bestimmen. Die Rechnungen sind zu zeigen.

Examiner le problème à valeur initiale

(a) Utiliser un champ vectoriel pour esquisser la solution pour l'intervalle $0 \leq t \leq 2$.

(b) Utiliser une séparation des variables pour trouver la solution exacte de cette équation.

(c) Appliquer **un pas** de la méthode de Runge–Kutta pour trouver la valeur de la solution pour $t = 1$. Montrer les calculations.

Aufgabe / problème 5:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - 16\,y(t) = 3\,e^{2t} \quad \text{mit/avec} \quad y'''(0) = y''(0) = y'(0) = 0 \quad \text{und/et} \quad y(0) = 7$$

(a) Bestimmen Sie $Y(s)$ und die exakte **Form** der Partialbruchzerlegung von $Y(s)$.
Tip: $(a^2 - 1) = (a + 1)\,(a - 1)$

(b) Geben Sie die exakte Form der Lösung $y(t)$ an. Die Koeffizienten sind **nicht** zu berechnen.

(c) Die Lösung besteht aus 5 Beiträgen. Bestimmen Sie den Beitrag, der am schnellsten divergiert, inklusive Koeffzient in der Partialbruchzerlegung.

(d) Bestimmen Sie ebenso den Beitrag der am schnellsten gegen 0 konvergiert.

Examiner l'équation différentielle

(a) Trouver $Y(s)$ et la **forme** exacte de la décomposition en fractions partielles de $Y(s)$.
Tip: $(a^2 - 1) = (a + 1)\,(a - 1)$

(b) Donner la forme exacte de la solution $y(t)$. Il **n'est pas** nécessaire de calculer les coefficients.

(c) La solution consiste en 5 expressions simples. Déterminer le terme qui diverge le plus rapide, y inclus le coefficient de la décomposition en fractions partielles.

(d) De la même façon, trouver le terme qui tend vers zéro le plus rapidement.

Aufgabe / problème 6:

Von einer einfachen Funktion $f(x,y)$ weiss man, dass

Pour une fonction $f(x,y)$ simple on sait que

$$\nabla f(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = \left(-6\,y - 3\,x^2\ ,\ -6\,x - 3\,y^2\right)$$

(a) Erraten Sie die Funktion.

(b) Finden Sie alle kritischen Punkte dieser Funktion.

(c) Klassifizieren Sie die obigen kritischen Punkte als lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte.

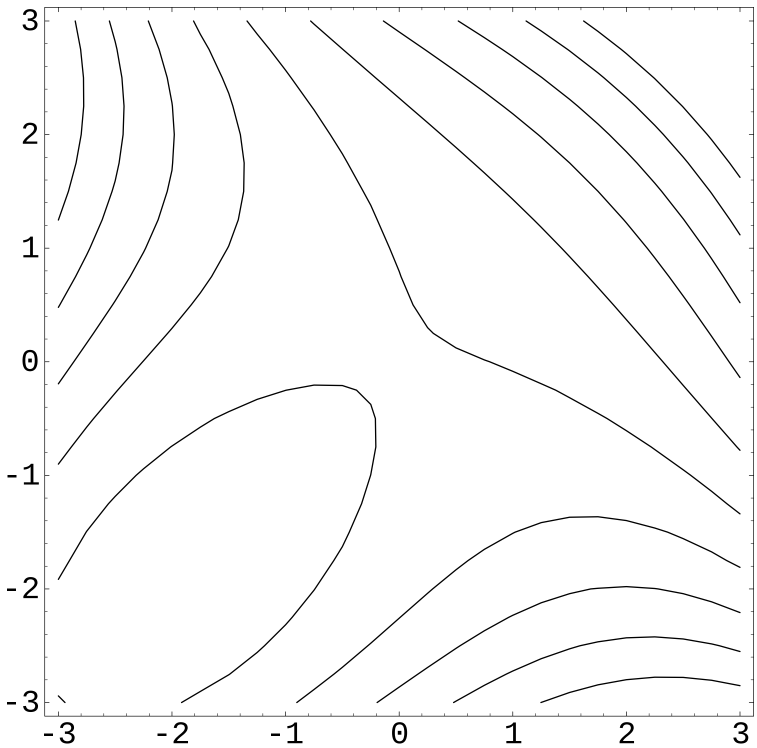
(d) In der untenstehenden Graphik finden Sie Niveaulinien dieser Funktion. Skizzieren Sie das Gradientenfeld so genau wie möglich in der gegebenen Graphik.

(a) Deviner la fonction.

(b) Trouver tous les points critiques de cette fonction.

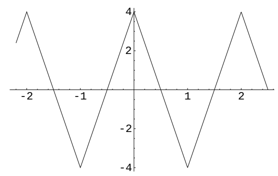
(c) Décider si les points critiques sont des maxima, minima ou des points de col.

(d) Dans le graphique ci–dessous trouver des courbes de niveau de cette fonction. Esquisser le champ vectoriel du gradient le plus exact possible dans le graphique donné.



Aufgabe / problème 7:

Die Fourierreihe der rechtsstehenden 2–periodischen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch
La série de Fourier de la fonction à droite est donnée par



$$f(x) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\,x\,\pi)}{(2k+1)^2}$$

(a) Finden Sie die komplexen Koeffizienten c_7, c_8 und c_{-17}.

(b) Finden Sie die Fourierreihe der unten links stehenden Funktion $g(x)$.

(c) Finden Sie die Fourierreihe der unten rechts stehenden Funktion $h(x)$.

(a) Trouver les coefficients c_7, c_8 et c_{-17} de la série de Fourier complexe.

(b) Trouver la série de Fourier de la fonction $g(x)$ ci–dessous à gauche.

(c) Trouver la série de Fourier de la fonction $h(x)$ ci–dessous à droite.