F2 Mathematik / mathématique
Vordiplom / examen propédeutique

Dr. Andreas Stahel
HTA Biel
10. September 2003, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Pour le disque D de rayon 3, le centre à l'origin et ayant le cercle C comme bord (orientation positive), calculer les expressions suivantes d'une façon exacte:

Für eine Kreisscheibe D mit Radius 3 und Zentrum im Ursprung und dem positiv orientierten Kreis C als Rand sind die folgenden Integrale exakt zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
a &= \iint_D \operatorname{div} \begin{pmatrix} (x^2+y^2)\, x \\ (x^2+y^2)\, y \end{pmatrix} dA \\
b &= \oint_C \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \\
c &= \oint_C \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\; ds \\
d &= \oint_C (1+y+x)\; ds
\end{aligned}$$

Aufgabe / problème 2:

Die Form eines Springseiles ist gegeben durch die Funktion

La forme d'une corde à sauter est donnée par la fonction

$$h(x) = 3\,(0.5 - x^2) \quad \text{für/pour} \quad x^2 \leq 0.5$$

Das Seil hat eine Masse von 1 kg und macht pro Sekunde eine volle Umdrehung.

(a) Bestimmen Sie die Länge L des Seiles und daraus die spezifische Masse ρ (in kg/m) .

(b) Stellen Sie das Integral auf um die Rotationsenergie zu berechnen.

La corde a une masse de 1 kg et fait un tour complet par seconde.

(a) Trouver la longueur L de la corde, puis calculer la masse spécifique ρ (en kg/m) .

(b) Donner l'intégrale pour déterminer l'énergie cinétique de la rotation.

Aufgabe / problème 3:

Das Massenträgheitsmoment eines Körpers K mit konstanter Dichte ρ ist gegeben durch

Le moment d'inertie d'un solide K de densité ρ constante est donné par

$$J = \rho \iiint_K r^2 \; dV$$

Hierbei ist r der Abstand von der Rotationsachse und somit von (x, y, z) abhängig. Sei K nun der Einheitswürfel, d.h. $0 \leq x, y, z \leq 1$.

r représente la distance de l'axe de rotation et dépend donc de (x, y, z). Examiner le cube unité K, c'est–à–dire $0 \leq x, y, z \leq 1$.

(a) Stellen Sie das Integral auf um das Massenträgheitsmoment J_z einer Rotation um die z Achse zu berechnen.

(b) Berechnen Sie J_z.

(c) Als neue Rotationsachse wird nun eine zur z–Achse parallele Gerade durch den Schwerpunkt verwendet. Stellen Sie das Integral für das Massenträgheitsmoment J zu, anschliessend ist J zu berechnen.

(a) Donner l'intégrale pour le moment d'inertie J_z pour une rotation par rapport à l'axe des z .

(b) Calculer J_z.

(c) Comme nouvel axe de rotation, prenez une droite par le centre de gravité, parallèle à l'axe des z. Trouver l'intégrale pour le moment d'inertie J, puis calculer J .

Aufgabe / problème 4:

Werden zwei Widerstände R_1 und R_2 parallel geschaltet, so ergibt sich der neue Widerstand

Si on met deux résistances R_1 et R_2 en parallèle on obtient une nouvelle résistance

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

(a) Die beiden Widerstände ändern sich um ΔR_1, resp. ΔR_2. Beide Änderungen sind klein im Vergleich zu R_1, resp. R_2. Bestimmen Sie die Änderung ΔR von R mit Hilfe einer linearen Approximation.

(b) Schreiben Sie das Resultat um, sodass der relative Fehler von R als Funktion der relativen Fehler von R_1 und R_2 erscheint.

(c) Die relativen Fehler von R_1 und R_2 gleich sind, gegeben durch α, wobei $|\alpha| \ll 1$. Finden Sie eine sehr einfache Formel für den relativen Fehler von R.

(a) Les deux résistances changent par ΔR_1, resp. ΔR_2. Les deux changements sont petits par rapport à R_1, resp. R_2. Trouver le changement ΔR de R à l'aide d'une approximation linéaire.

(b) Écrire le résultat ci–dessus tel que l'erreur relative de R soit donnée comme fonction des erreurs relatives de R_1 et R_2 .

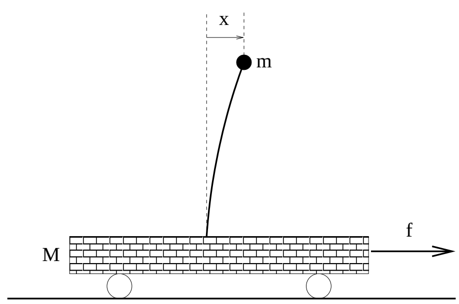
(c) Les erreurs relatives de R_1 et R_2 sont égales, données par α avec $|\alpha| \ll 1$. Trouver une formule simple pour l'erreur relative de R.

Aufgabe / problème 5:

Sei $y(t)$ die Position des Wagens und $x(t)$ die horizontale Auslenkung der an einer Blattfeder befestigten Masse m. $f(t)$ ist eine externe Kraft. Dann beschreiben die folgenden Differentialgleichungen das Verhalten des Systems.

Soit $y(t)$ la position du chariot et $x(t)$ le déplacement vertical de la masse m, attachée à un ressort–lame. $f(t)$ est une force externe. Les équations différentielles ci–dessous fournissent une description du comportement de ce système.

$$\begin{aligned} M\,\ddot{y} &= f + c\cdot x \\ m\,\ddot{x} &= -c\,x - m\,\ddot{y} \end{aligned}$$



(a) Finden Sie die Lösung $x(t)$ falls $\ddot{y}(t) = a$ konstant ist und $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ mit Hilfe von Laplacetransformationen.

(b) Fassen Sie das Obige als System auf mit Eingang $f(t)$ (resp. $F(s)$) und Ausgang $x(t)$, resp. $X(s)$. Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$.

(c) Ist die externe Kraft Null ($f(t) = 0$), so schwingt das System mit einer Winkelgeschwindigkeit ω. Bestimmen Sie ω als Funktion von M und untersuchen Sie die drei Spezialfälle der Masse M.

- $M \gg m$, oder auch $M \to \infty$
- $M = m$
- $M \ll m$, oder auch $M \to 0+$

(a) À l'aide d'une transformation de Laplace, trouver la solution $x(t)$, si $\ddot{y}(t) = a$ est constant et $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

(b) Prenez $f(t)$ (resp. $F(s)$) comme entré et $x(t)$, resp. $X(s)$, comme sortie du système ci–dessus. Trouver la fonction de transfert $T(s)$.

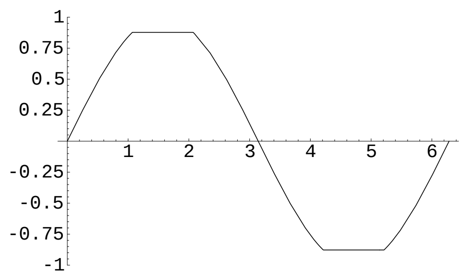
(c) Si la force externe est zéro ($f(t) = 0$) le système va osciller avec une vitesse angulaire ω. Écrire ω comme fonction de M, puis examiner les trois cas spéciaaux pour la masse M.

- $M \gg m$, ou $M \to \infty$
- $M = m$
- $M \ll m$, ou $M \to 0+$

Aufgabe / problème 6:

Für eine Konstante $h = \sin(\pi/2 - d)$ wird die Sinusfuktion oben und unten auf dieser Höhe abgeschnitten. Es ergibt sich eine neue Funktion $f(t)$. Die Situation für $d = 0.5$ ist unten gezeigt.

Pour une constante $h = \sin(\pi/2 - d)$ on coupe le graphe de la fonction $\sin t$ en haut et en bas à cette hauteur. On obtient une nouvelle fonction $f(t)$. La situation $d = 0.5$ est montrée ci–dessous.



Zu untersuchen ist die Fourierreihe dieser Funktion $f(t)$.

(a) Berechnen Sie die Werte von a_n exakt.

(b) Geben Sie das Integral an um b_n zu berechnen.

(c) Bestimmen die b_3 und c_3 numerisch für $d = 0.5$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe einer Symmetrie, dass $b_2 = 0$.

Examiner la série de Fourier de cette fonction $f(t)$.

(a) Trouver les valeurs de a_n exactes.

(b) Donner une intégrale pour déterminer les valeurs de b_n.

(c) Trouver les valeurs de b_3 et c_3 numériquement pour $d = 0.5$.

(d) Ã l'aide d'une symétrie, vérifier que $b_2 = 0$.

Aufgabe / problème 7:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\,x(t) = x \cdot (1-x) \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = x_0$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $0 \le t \le 3$ und $-1 \le x \le 2$.

(b) Skizzieren Sie vier die Lösungen mit den mit Anfangswerten $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.5$ und $x_0 = 2$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0.5$ **graphisch**.

(d) Verwenden Sie 2 Schritte des numerischen Verfahrens von Heun um die Lösung der Gleichung mit Anfangswert $x_0 = 0.5$ bei $t = 3$ zu bestimmen. Es genügt mit 4 signifikanten Stellen zu rechnen.

(a) Esquisser le champ vectoriel pour le domaine $0 \le t \le 3$ et $-1 \le x \le 2$.

(b) Esquisser les quatre solutions avec les valeurs initiales $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.5$ et $x_0 = 2$.

(c) Déterminer la limite $\lim_{t\to\infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 0.5$ en utilisant un argument **graphique**.

(d) Appliquer 2 pas de la méthode numérique de Heun pour trouver la valeur de la solution avec valeur initiale $x_0 = 0.5$ au temps $t = 3$. Il suffit de calculer avec 4 chiffres significatifs.