F2 Mathematik/Mathématique **Prüfung/Épreuve 2**

Dr. A. Stahel 13.3.2003

Aufgabe / Problème 1:

Untersuchen Sie die Funktion

$$z = f(x, y) = \cosh(2x - y) - \sin(3y) + 3e^x$$

in der Nähe des Ursprunges $(0, 0)$.

(a) Approximieren Sie die Funktion möglichst gut durch eine Ebene.

(b) In welcher Richtung wächst die Funktion am schnellsten und wie gross ist die Steigung in diese Richtung?

(c) Approximieren Sie die Funktion möglichst gut durch eine Fläche zweiter Ordnung.

Examiner la fonction

$$z = f(x, y) = \cosh(2x - y) - \sin(3y) + 3e^x$$

proche à l'origine $(0, 0)$.

(a) Touver la meilleure approximation de la fonction par un plan.

(b) Dans quelle direction monte la surface le plus rapidement possible et quelle est la pente dans cette direction?

(c) Trouver la meilleure approximation de la fonction par une surface de degré deux.

Aufgabe / Problème 2:

Untersuchen Sie den Zylinder G mit Radius $R = 2$ und der z-Achse als Zylinderachse. Die Höhe sei 5, gegeben durch $0 \leq z \leq 5$. Zu untersuchen ist das Geschwindigkeitsfeld $\vec{F}$.

Examiner le cylindre G de rayon $R = 2$ avec l'axe des z comme axe central du cylindre. La hauteur est 5, donnée par $0 \leq z \leq 5$. Utiliser le champ de vitesse $\vec{F}$.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie den Gesamtfluss aus dem Zylinder.

(b) Geben Sie das Integral an um den Fluss durch die Mantelfläche des Zylinders zu bestimmen. Das Intgeral ist nicht zu berechnen, sondern zu vereinfachen.

(a) Trouver le flux total hors du cylindre de ce champ de vitesse.

(b) Donner l'intégral pour le flux par la face latéral du cylindre. Ne calculer pas l'intégral, mais simplifier.

Aufgabe / Problème 3:

Ein Körper mit konstanter Dichte ρ ist beschrieben durch die vier Eckpunkte

Un solide avec une densité constante ρ est donné par les quatre points

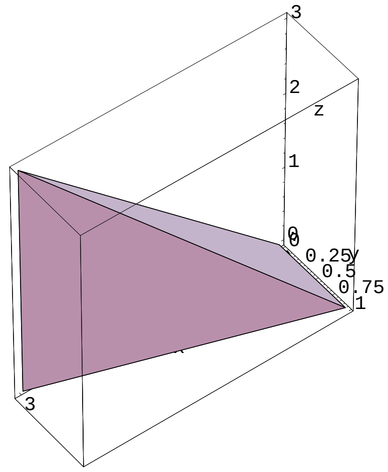
$$(0,0,0) \quad , \quad (3,0,0) \quad , \quad (0,1,0) \quad \text{und/et} \quad (3,0,3)$$

(a) Stellen Sie ein Doppel– oder Dreifach-Integral auf, um das Volumen des Körpers zu berechnen. Bestimmen Sie anschliessend das Volumen.

(b) Die Gravitationskraft wirke in die negative z–Richtung. Stellen Sie das Integral auf um das Moment M bezüglich der y–Achse zu bestimmen. Berechnen Sie M.

(a) Trouver un double ou triple intégrale pour calculer le volume de cette solide. Puis calculer le volume.

(b) Tenez compte de la force de gravitation dans la direction des z négative. Trouver l'intégral pour le moment M par rapport à l'axe des y. Calculer M.



Aufgabe / Problème 4:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{2}\,(x\,,\,y)\cdot\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x\,,\,y)\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\,\left(4\,x^2 - 2\,x\,y + 3\,y^2\right) + 7\,x - 6\,y
\end{aligned}
$$

(a) Untersuchen Sie die Extremas der Funktion $f(x,y)$. Finden Sie ein Gleichungssystem für die Lage des Extremums. Bestimmen Sie anschliessend den Wert des Extremums.

(b) Geben Sie die Gleichungen an, um das Extremum der untenstehenden Funktion $g(\vec{x})$ zu bestimmen.

(a) Examiner les extrema de la fonction $f(x,y)$. Trouver un système des équations pour la position de l'extremum. Puis déterminer la valeur de l'éxtremum.

(b) Puis donner les équations pour la location de l'extrema de la fonction $g(\vec{x})$ ci–dessous.

$$
\begin{aligned}
g\,(\vec{x}) &= \frac{1}{2}\,\vec{x}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\vec{x} + \vec{x}^T\cdot\vec{b} \\
&= \frac{1}{2}\,(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$
