F2 Mathematik / mathématique
Vordiplom / examen propédeutique

Dr. Andreas Stahel
HTA Biel
11. September 2002, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Un demie cercle $C \subset \mathbb{R}^2$ avec rayon R est dans le demi plan supérieure avec centre à l'origine.

(a) Le poids spécifique ρ (mesuré en $\frac{\text{kg}}{\text{m}}$) est proportionelle à la distance de l'axe des x. Déterminer la masse totale M.

(b) Un ballon avec masse m bouge sur cette courbe C de gauche à droite dans le champs de force $\vec{F}$. Trouver le travail A nécessaire pour boucher la masse sur cette courbe.

Ein Halbkreis $C \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius R liegt in der oberen Halbebene mit Mittelpunkt im Ursprung.

(a) Das spezifische Gewicht ρ (gemessen in $\frac{\text{kg}}{\text{m}}$) ist proportional zum Abstand von der x–Achse. Bestimmen Sie die Gesamtmasse M.

(b) Ein Ball mit Masse m wird im Kraftfeld $\vec{F}$ entlang der Kurve von links nach rechts bewegt. Bestimmen Sie die dazu aufzuwendende Arbeit A.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Aufgabe / problème 2:

Ein Rohr der Länge L, Innenradius R_1 und Aussenradius R_2 wird durch ein Moment M um den Winkel α verdreht. Untersuchen Sie den Winkel α als Funktion der beiden Radien R_1 und R_2 .

On applique un moment M à une tube de longueur L, rayon intérieur R_1 et rayon extérieur R_2. Elle est déformé par un angle α . Examiner α comme fonction des deux rayons R_1 et R_2 .

$$\alpha = \frac{2\,(1+\nu)\,L}{E\,J}\,M \quad \text{wobei/avec} \quad J = \frac{\pi}{2}\,\left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

(a) Für kleine Änderungen $\Delta R_1 \ll R_1$ und $\Delta R_2 \ll R_2$ ist die resultierende Winkeländerung $\Delta\alpha$ mit Hilfe einer linearen Approximation zu bestimmen.

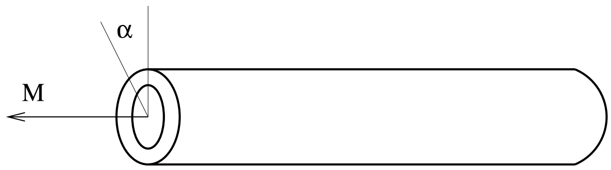
(b) Drücken Sie die relative Änderung $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ als Funktion von R_1, R_2, $\frac{\Delta R_1}{R_1}$ und $\frac{\Delta R_2}{R_2}$.

(c) Verwenden Sie die untenstehenden Werte für ein Aluminium–Rohr. Bestimmen Sie α im Bogenmass und im Gradmass. Um wieviel dürfen die Radien R_1 und R_2 variieren, damit $|\Delta\alpha| \leq 1°$?

(a) Pour des petits changements $\Delta R_1 \ll R_1$ et $\Delta R_2 \ll R_2$ trouver le changement $\Delta\alpha$ de l'angle à l'aide d'une approximation linéaire.

(b) Exprimer le changement relative $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ comme fonction de R_1, R_2, $\frac{\Delta R_1}{R_1}$ et $\frac{\Delta R_2}{R_2}$.

(c) Utiliser les valeurs ci–dessous pour une tube en aluminium. Calculer α en radian et degrée. Quel sont les changements permissible en R_1 et R_2 tel que $|\Delta\alpha| \leq 1°$?



Symbol symbole	Wert valeur	Einheit unité
M	1	N m
L	1	m
R_1	3	mm
R_2	5	mm
E	$7 \cdot 10^{10}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
ν	0.34	

Aufgabe / problème 3:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\,x(t) = x \cdot (x-2)^2 \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = x_0$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $-0.5 \leq t \leq 3$ und $-1 \leq x \leq 4$.

(b) Skizzieren Sie vier die Lösungen mit den mit Anfangswerten $x_0 = 2.1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 0.1$ und $x_0 = -0.1$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 1$ **graphisch**.

(d) Verwenden Sie 3 Schritte des numerischen Verfahrens von Euler um die Lösung der Gleichung mit Anfangswert $x_0 = 1$ bei $t = 1$ zu bestimmen. Es genügt mit 4 signifikanten Stellen zu rechnen.

Exminer l'équation différentielle

(a) Esquisser le champ vectorielle pour la domaine $-0.5 \leq t \leq 3$ et $-1 \leq x \leq 4$.

(b) Esquisser les quatre solutions avec les valeurs initiales $x_0 = 2.1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 0.1$ et $x_0 = -0.1$.

(c) Trouver la limite $\lim_{t\to\infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 1$ en utilisant un argument **graphique**.

(d) Appliquer 3 pas de la méthode numérique de Euler pour trouver la valeur de la solution avec valeur initiale $x_0 = 1$ au temps $t = 1$. Suffit de calculer avec 4 chiffres significative.

Aufgabe / problème 4:

Examiner la domaine bornée $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, limitée par la surface $y = x^2$ et les deux plans $y + z = 4$ et $z = 0$.

(a) Déterminer la volume V de cette domaine. Rendre l'intégral et la valeur exacte de l'intégral.

(b) La densité ρ du matériel est constante et le volume fait des rotations par rapport á l'axe des z avec vitesse angulaire ω. Trouver l'intégral pour l'énergie cinétique de cette rotation.

(c) Trouver la valeur numérique de E .

Untersuchen Sie den beschränkten Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ der beschränkt ist durch die Fläche $y = x^2$ und die beiden Ebenen $y + z = 4$ und $z = 0$.

(a) Bestimmen Sie das Volumen V des Bereichs. Das Integral ist aufzustellen und exakt auszurechnen.

(b) Die Dichte ρ des Materials ist konstant und das Volumen wird um die z–Achse rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω. Stellen Sie das Integral auf um die kinetische Energie E zu berechnen.

(c) Bestimmen Sie den numerischen Wert von E .

Aufgabe / problème 5:

Zu untersuchen sind die exakten Lösung des Differentialgleichungssystems. Verwenden Sie Laplacetransformationen.

Examiner les solutions exactes du systèmes des équations différentielles ci–dessous. Utiliser des transformations de Laplace.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,x &= -x - 2\,y + f(t) \\ \frac{d}{dt}\,y &= 2\,x - y \end{aligned}$$

(a) Setzten Sie $f(t) = 0$ und die Anfangsbedingungen $x\,(0) = a$ und $y\,(0) = 0$. Zu bestimmen sind die exakten Lösungen $x(t)$ und $y(t)$.

(b) Setzen Sie $x(0) = y(0) = 0$ und betrachten Sie die Gleichungen als System mit Eingang $F(s)$ und Ausgang $X(s)$. Zu bestimmen ist die Transferfunktion $T(s)$.

(a) Mettre $f(t) = 0$ et les conditions initiales $x\,(0) = a$ et $y\,(0) = 0$. Trouver les solutions exactes $x(t)$ et $y(t)$.

(b) Mettre $x(0) = y(0) = 0$ et examiner les équations différentielles comme système avec input $F(s)$ et output $X(s)$. Trouver la fonction de transfert $T(s)$.

Aufgabe / problème 6:

Eine Masse m wird mit einer Geschwindigkeit v_0 in eine Feder bewegt (Federkonstante k). Die Masse wird die Feder zusammendrücken, dann aber von der Feder nach rechts wegbeschleunigt. Zu untersuchen ist der Zeitbereich während dem die Feder die Masse berührt. Reibung ist zu vernachlässigen.

Une masse m bouche vers un ressort (constant de ressort k) avec une vitesse v_0. La masse va compresser le ressort, mais finalement le ressort relance la masse vers la droite. Examiner l'intervalle de temps durant lequel la masse et le ressort se touchent. Ignorer frotement.

(a) Stellen die eine Differentialgleichung auf für die Koordinate x des Kontaktpunktes Feder–Kugel als Funktion der Zeit t.

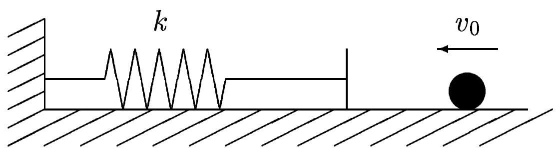
(b) Finden Sie die Lösung dieser Differentialgleichung.

(c) Wie gross ist die Federkonstante k zu wählen, damit die Kontaktzeit Feder–Kugel genau 1 Sekunde ist?

(a) Trouver une équation différentielle pour la coordonnée x du point de contact comme fonction du temps t.

(b) Trouver la solution de cette équation différentielle.

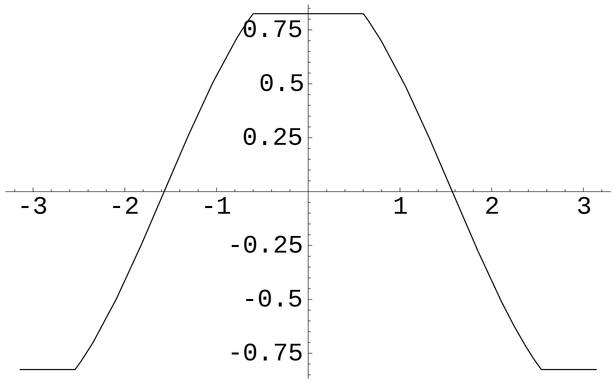
(c) Choisir la constante du ressort k, telle que le temps de contact boule–ressort est exactement 1 seconde.



Aufgabe / problème 7:

Für eine Konstante $h = \cos(d)$ wird die Cosinusfunktion oben und unten auf dieser Höhe abgeschnitten. Es ergibt sich eine neue Funktion $f(t)$. Die Situation für $d = 0.6$ ist unten gezeigt.

Pour une constante $h = \cos(d)$ on coupe le graphe de la fonction $\cos t$ de en haut et en bas sur cette hauteur. On obtiens une nouveau fonction $f(t)$. La situation $d = 0.6$ et montrer ci–dessous.



Zu untersuchen ist die Fourierreihe dieser Funktion $f(t)$.

(a) Berechnen Sie die Werte von b_n und a_0 exakt.

(b) Geben Sie das Integral an um a_n zu berechnen.

(c) Bestimmen die a_7 und c_7 numerisch für $d = 0.6$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe einer Symmetrie, dass $a_2 = 0$.

Examiner la série de Fourier de cette fonction $f(t)$.

(a) Trouver les valeurs exactes de b_n et a_0.

(b) Donner un intégral pour déterminer a_n.

(c) Trouver les valeurs de a_7 et c_7 numériquement pour $d = 0.6$.

(d) Vérifier, à l'aide d'une symétrie que $a_2 = 0$.