F2 Mathematik/Mathématique **Prüfung/Épreuve 4**

Dr. A. Stahel 11.7.2002

Aufgabe / Problème 1:

Ein Differentialgleichungssystem wurde mit numerischen Verfahren gelöst mit den folgenden Resultaten. Die Rechnung mit den Verfahren von Euler und 2000 Schritten benötigte 0.5 sec Rechenzeit.

Un système des équations différentielles est a résoudre avec des méthodes numériques. Les calculations rends les résultats ci–dessus. La calculations avec la méthode de Euler á 2000 pas utilise 0.5 sec de temps de calcul.

Verfahren méthode	Anzahl Schritte nombre de pas	Resultat résultat
Euler	1000	$y(10) = -0.6243496719$
Euler	2000	$y(10) = -0.5674257006$
Runge–Kutta	100	$y(10) = -0.5122669759$
Runge–Kutta	200	$y(10) = -0.5122887623$

Der Approximationsfehler muss kleiner als 10^{-8} sein.

L'erreur d'approximation doit être plus petit que 10^{-8}.

(a) Wie viele Schritte sind mit dem Verfahren von Euler notwendig?

(b) Wie viele Schritte sind mit dem Verfahren von Runge–Kutta notwendig?

(c) Wie lange wird die Rechnung mit dem Verfahren von Runge–Kutta dauern?

(a) Combien de pas sont nécessaire avec la méthode de Euler?

(b) Combien de pas sont nécessaire avec la méthode de Runge–Kutta?

(c) Déterminer le temps de calcul pour la méthode de Runge–Kutta.

Aufgabe / Problème 2:

Untersuchen Sie das folgende Differentialgleichungssystem mit Hilfe von Eigenvektoren

Examiner le système des équations différentielles suivantes á l'aide des vecteurs propres.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3\,x(t) + 2\,y(t) + 3\,z(t) \\ \dot{y}(t) &= +1\,x(t) - 4\,y(t) + 1\,z(t) \\ \dot{z}(t) &= +3\,x(t) + 2\,y(t) - 3\,z(t) \end{aligned}$$

Für die Teilaufgaben (b)–(d) sind die folgenden Anfangsbedingungen zu verwenden.

Pour les partie (b)–(d) utiliser les condition initialles

$$x(0) = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad \text{und/et} \quad z(0) = 1$$

(a) Schreiben Sie die allgemeine Lösung an. Verwenden Sie den Taschenrechner. Die Zwischenresultate sind anzugeben. Die Lösung wird drei unbekannt Konstanten enthalten.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems, d.h. Differentialgleichungen und Anfangswerte.

(c) Berechnen Sie $z(3)$.

(d) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

(a) Donner la solution générale du système. Utiliser la calculatrice, mais montrer les résultats intermédiaires. La solution va contenir trois constantes inconnus.

(b) Trouver la solution du problème initiale, veut dire équations différentielles et conditions initiales.

(c) Calculer $z(3)$.

(d) Déterminer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

$$\vec{a} = \lim_{t\to\infty} \vec{d}(t) \quad \text{und/et} \quad \vec{b} = \lim_{t\to-\infty} \vec{d}(t)$$

wobei/avec

$$\vec{d}(t) = \frac{1}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Aufgabe / Problème 3:

Ein Gerät kann FFT mit $2^{11} = 2048$ Punkten durchführen. Um eine gegebenes Signal zu analysieren geht man folgendermassen vor:

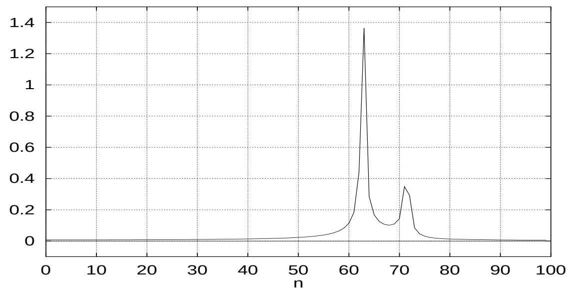
1. In 3.5 Sekunden 2049 Werte messen, der letzte wird eliminiert.
2. Die Koeffizienten c_n der diskreten Fourier Transformation bestimmen.
3. Den Betrag $|c_n|$ als Funktion von n auftragen.

Eine solche Messung ergab die untenstehende Figur.

Avec un instrument on peut analyser (par FFT) $2^{11} = 2048$ à la fois. Pour analyser un signal donné on fait les opérations suivantes:

1. mesurer 2049 points en 3.5 secondes, éliminer le dernier point.
2. calculer les coefficients de Fourier c_n avec la transformation de Fourier discrète (DFT).
3. montrer la valeur absolut $|c_n|$ comme fonction de n auftragen.

On arrive à la figure ci–dessous.



(a) Offensichtlich sind im Signal zwei Teilsignale mit verschiedenen Frequenzen versteckt. Bestimmen Sie die beiden Frequenzen.

(b) Signale mit welcher Frequenz können mit der obigen Messanordnung im besten Fall noch erfasst werden?

(c) Für eine neue Messung soll die Intervallänge von 3.5 Sekunden geändert werden, sodass höhere Frequenzen auch gefunden werden. Bis zu welcher Frequenz kann man höchstens messen, wobei die beiden obigen Frequenzen noch klar unterscheidbar sein müssen.

In dieser Aufgabe sind nur sehr wenige Rechnungen auszuführen, aber die Überlegungen müssen klar dokumentiert werden.

(a) Évidament le signal contient de signal avec des fréquences différentes. Touver ces deus fréquences.

(b) Quel est la fréquence maximale qu'on peut mesurer d'une façon fiable avec l'arrangement donné en haut?

(c) Pour un nouveau série de l'experiment on veut changer la longueur de l'intervalle de 3.5 secondes, tel qu'on peut analyser des fréquences plus haut. Quel est la fréquence maximale à analyser si on doit être capable de distinguer les deux frèquences initialles.

Pour resoudre ce problème il y a très peu de calculation à faire. Mais donner une documentation claire du raisonnement pour les calculations.

Aufgabe / Problème 4:

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion

On donne la fonction périodique de période 2π

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{4} \qquad -\pi \leq t < \pi$$

(a) Calculer la série de Fourier de f . Calculer d'une façon exacte.
Indication: Noter que $f''(t) = f(t)$. Effectuer deux intégrations par parties. Pas besoin de calculer la valeur $a_0 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$.

(b) Trouver les valeurs numériques de a_{13} et b_{13} .

(c) Utiliser la série de Fourier ci–dessus pour déterminer la valeur de s .

(a) Berechnen Sie die Fourier Reihe von f . Rechnen Sie exakt.
Hinweis: Beachten Sie, dass $f''(t) = f(t)$. Integrieren Sie zweimal partiell. Der Wert $a_0 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$ ist nicht zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie die numerischen Werte von a_{13} und b_{13} .

(c) Verwenden Sie die obige Fourierreihe um den Wert von s zu bestimmen.

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$
