# F2 Mathematik / mathématique
# Vordiplom / examen propédeutique

Dr. Andreas Stahel
HTA Biel
12. September 2001, 8:00 – 11:00

**Aufgabe / problème 1:**

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$f(x,y) = 3\,x^2 + y^2 - 2\,x\,y - 10\,x + 2\,y - 4$$

(a) In welche Richtung (in $xy$–Ebene) hat die Fläche $z = f(x,y)$ die grösste Steigung bei $(x,y) = (1,3)$ und wie steil (als Winkel) ist die Fläche?

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte dieser Funktion und entscheiden Sie ob ein Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

(a) Dans quel direction (dans le plan des $xy$) la surface monte le plus rapide possible au point $(x,y) = (1,3)$ et quel est l'angle de montée?

(b) Trouver tous les points critiques de cette fonction et décider si il s'agit d'un minimum, maximum ou d'un point de col.

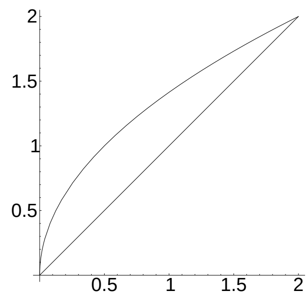
---

**Aufgabe / problème 2:**

Untersuchen Sie das rechtsstehende Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ zwischen $y = \sqrt{2\,x}$ und der Geraden. Zu bestimmen ist

$$S = \iint_G x \; dA$$

Examiner la domaine $G \subset \mathbb{R}^2$ à droite, entre un $y = \sqrt{2\,x}$ et la droite. Examiner l'intégral ci–dessus.




(a) Stellen Sie ein explizites Doppelintegral auf für $S$ .

(b) Anschliessend ist $S$ zu berechnen, die Zwischenschritte sind zu zeigen. Die Rechnungen sollten exakt sein.

(a) Trouver un double intégral explicite pour $S$ .

(b) Puis calculer $S$, montrer les calculations intermédiaires. Rendre des calculations exactes.

---

**Aufgabe / problème 3:**

Sei $C \subset \mathbb{R}^2$ der obere Halbkreis mit Radius 3 und Zentrum im Ursprung, orientiert von links nach rechts. Betrachten Sie die Funktionen

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ le demie cercle supérieure de rayon 3 avec centre à l'origine et orientation de gauche à droite. Examiner le fonctions

$$f(x,y) = y \quad \text{und/et} \quad \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} (1 + x\,y)\; e^{x\,y} \\ x^2\; e^{x\,y} \end{pmatrix}$$

Die beiden untenstehenden Linienintegrale sind umzuschreiben als „normale“ Integrale und dann die Werte zu berechnen.

Transformer les deux intégrales curviligne ci– dessous dans des intégral „normaux“ et puis trouver les valeurs.

(a)

$$A = \int_C f(x, y)\, ds$$

(b)

$$B = \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{ds}$$

---

**Aufgabe / problème 4:**

Examiner l'équation differentielle

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = (y(x) - 1)^3$$

(a) Dessigner le champ véctorielle de cette équation différentielle pour $-2 \leq x \leq 4$ et $-1 \leq y \leq 5$ .

(b) Esquisser quelques solutions.

(c) Trouver la solution exacte de l'équation avec la condition initialle $y(0) = 3$.

(a) Zeichnen Sie das Vektorfeld dieser Differentialgleichung für $-2 \leq x \leq 4$ und $-1 \leq y \leq 5$ .

(b) Skizzieren Sie einige Lösungen.

(c) Bestimmen Sie die exakte Lösung der Gleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 3$.

---

**Aufgabe / problème 5:**

Examiner le système avec input $f(t)$ et output $y(t)$ (resp. $F(s)$ et $Y(s)$).

Untersuchen Sie das folgende System mit Input $f(t)$ und Output $y(t)$ (resp. $F(s)$ und $Y(s)$).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3\,x(t) + y(t) + f(t) \\ \dot{y}(t) &= +x(t) - 4\,y(t) \end{aligned}$$

(a) Montrer que tous les solutions du système homogène tends vers zéro comme $e^{-\alpha t}$ et trouver la valeur de l'exposant $\alpha$ .

(b) Trouver la fonction de transfert $T(s)$ .

(c) Esquisser le plot de Bode pour l'amplitude à l'aide de deux droites.

(a) Zeigen Sie, dass das alle Lösungen des homogenen Systems gegen Null konvergieren wie $e^{-\alpha t}$ und bestimmen Sie den Exponenten $\alpha$ .

(b) Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$ .

(c) Skizzieren Sie den Bode Plot der Amplitude mit Hilfe von zwei Geraden.

---

**Aufgabe / problème 6:**

Gegeben sei die $2\pi$-periodische Funktion

On donne la fonction périodique de période $2\pi$

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{4} \qquad -\pi \le t < \pi$$

(a) Calculer la série de Fourier de $f$ . Calculer d'une façon exacte.
Indication: Noter que $f''(t) = f(t)$ . Effectuer deux intégrations par parties. Pas besoin de calculer la valeur $a_0 = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$ .

(b) Trouver les valeurs numériques de $a_{13}$ et $b_{13}$ .

(c) Utiliser la série de Fourier ci–dessus pour déterminer la valeur de $s$ .

(a) Berechnen Sie die Fourier Reihe von $f$ . Rechnen Sie exakt.
Hinweis: Beachten Sie, dass $f''(t) = f(t)$. Integrieren Sie zweimal partiell. Der Wert $a_0 = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$ ist nicht zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie die numerischen Werte von $a_{13}$ und $b_{13}$ .

(c) Verwenden Sie die obige Fourierreihe um den Wert von $s$ zu bestimmen.

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

---