F2 Mathematik/Mathématique **Prüfung/Épreuve 3**

Dr. A. Stahel 23.5.2001

Aufgabe / Problème 1:

Für die folgenden Systeme (Input $f(t)$, Output $y(t)$) ist zu entscheiden, ob sie stabil sind. Ein System kann durch eine Differentialgleichung oder eine Transferfunktion $T(s)$ gegeben sein.

Décider pour les systèmes suivantes (input $f(t)$, output $y(t)$) si il sont stables ou pas. Un système est donné pas une équation différentielle ou une fonction de transfert.

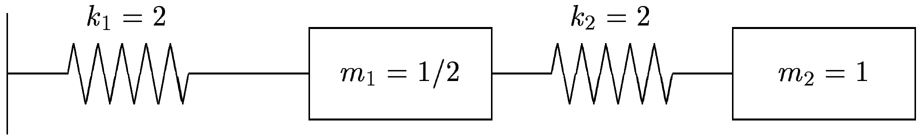
$$\begin{array}{lrcl}
(a) & y^{(3)}(t) + 3\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) & = & f(t) \\
(b) & y^{(3)}(t) + y''(t) - y'(t) + 2\,y(t) & = & f(t) \\
(c) & y^{(3)}(t) + y''(t) + y'(t) + 2\,y(t) & = & f(t) \\
(d) & T(s) & = & \dfrac{s-2}{s^3+s^2+s^2+s+1} \\
(e) & T(s) & = & \dfrac{s^2+2}{s^4+s^2+s^2+s+1}
\end{array}$$

Aufgabe / Problème 2:

Considérer le système de deux ressorts et deux masses oscillantes. Choisir les variables (coordonnées horizontales) telles que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ correspond à la situation des deux masses au repos. Pour la deuxième masse il y a une force de friction de largeur $-\dot{x}_2$. On applique une force horizontale externe $f_2(t)$ sur la deuxième masse donnée par

Betrachten Sie das folgende System von zwei schwingenden Massen gekoppelt durch zwei Federn. Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ der Ruhelage der beiden Massen entsprechen. Auf die zweite Masse wirke eine horizontale Reibungskraft der Stärke $-\dot{x}_2$. Auf die zweite Masse wirke eine externe, horizontale Kraft $f_2(t)$ der Form

$$f_2(t) = A\ \cos(\omega t).$$



(a) Trouver le système d'équations différentielles pour les expressions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

(b) Trouver le système d'équations pour les transformations de Laplace $X_1(s)$ et $X_2(s)$. Vous pouvez choisir les valeurs initiales.

(c) Trouver la fonction de transfert de ce système. Regarder la force $f_2(t)$ comme l'entrée et la vitesse $\dot{x}_2(t)$ comme la sortie du système.

(d) Si on ignore la force externe (veut dire $A = 0$) on trouve un système des équations différentielles linéaire homogène. Montrer que les solutions tends vers zéro comme $e^{-\alpha t}$ et trouver α.
Tip: réfléchir, mais peu de calculations.

(a) Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für die Grössen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.

(b) Finden Sie die Gleichungen für die Laplacetransformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ dieses Systems, wobei Sie die Anfangsbedingungen beliebig wählen dürfen.

(c) Finden Sie die Transferfunktion des Systems, wobei die Kraft $f_2(t)$ als Eingang und die Geschwindigkeit $\dot{x}_2(t)$ als Ausgang betrachtet wird.

(d) Ignoriert man die externe Kraft f (d.h. $A = 0$), so liegt ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem vor. Zeigen Sie dass dessen Lösungen exponentiell gegen Null konvergieren wie $e^{-\alpha t}$ und bestimmen Sie α.
Tipp: Denken und nur wenig rechnen.

Aufgabe / Problème 3:

Eine Transferfunktion ist gegeben durch

Une fonction de transfert est donnée par

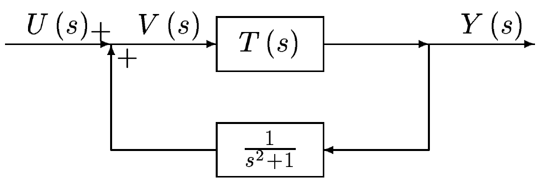
$$T(s) = \frac{3 - 37\,s^2}{s^4 + 3\,s^3 + K\,s^2 + 2\,s + 1}$$

(a) Verwenden Sie das Kriterium von Routh um zu entscheiden für welchen Bereich der Konstanten $K \in \mathbb{R}$ ist das System stabil ist.

(b) Setzen Sie $K = 2$ und untersuchen Sie das untenstehende System mit U als Input und Y als Output. Die neue Transferfunktion $G(s)$ ist eine gebrochen rationale Funktion. Bestimmen Sie den Nenner.

(a) Utiliser le critère de Routh pour trouver la domaine des valeurs de $K \in \mathbb{R}$ tel que le système est stable.

(b) Mettre $K = 2$ et examiner le système ci-dessous avec input U et output Y. La nouveau fonction de transfert $G(s)$ est une fonction rationelle propre, trouver le dénominateur.



Aufgabe / Problème 4:

Examiner un système avec fonction de transfert

Untersuchen Sie ein System mit der Transferfunktion

$$T(s) = \frac{s}{s^3 + 3\,s^2 + 3\,s + 2}$$

(a) Esquisser le plot de Bode des amplitudes le plus exactes possibles, en utilisent deux droites. Vérifier que les pentes et intersections des droites avec les axes sont correctes.

(b) Trouver le plot de Nyquist de $T(s)$ ci-dessous. Estimer pour quel valeurs de $K \in \mathbb{R}$ le système closed–loop avec $K \cdot T(s)$ est stable. Attention: tenir conte des valeurs positive et négative de K.

(a) Skizzieren Sie den Bode Plot des Amplitudengangs möglicht genau, mit Hilfe zweier geeigneter Geraden. Steigungen und Achsenabschnitt der Geraden sollten korrekt sein.

(b) Der Nyquist Plot von $T(s)$ ist unten gegeben. Schätzen Sie für welche Werte der Konstanten $K \in \mathbb{R}$ das Closed–Loop System mit $K \cdot T(s)$ stabil ist. Achtung: K kann positiv oder negativ sein.