**F2 Mathematik/Mathématique** **Prüfung/Épreuve 1**

Dr. A. Stahel 3.2.2001

**Aufgabe / Problème 1:**

La courbe $C \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par la paramétrisation ci–dessous. Calculer les deux intégrales d'une façon **exacte**.

Die Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die untenstehende Parametrisierung berechnen Sie die beiden Integrale **exakt**.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2 - t^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec/wobei} \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} a &= \int_C \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,x^2}}\, ds \\ b &= \int_C \begin{pmatrix} \sin\, x + e^y \\ x\, e^y \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \end{aligned}$$

---

**Aufgabe / Problème 2:**

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 2\,y(x) = x + e^{2x}$ .

(b) Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung ist gegeben durch $y(x) = c_1 \cos(3\,x) + c_2 \sin(3\,x) + 3\,x^2$. Bestimmen Sie eine mögliche Differentialgleichung.

(a) Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y'(x) + 2\,y(x) = x + e^{2x}$ .

(b) La solution générale le d'une équation différentielle est donnée par $y(x) = c_1 \cos(3\,x) + c_2 \sin(3\,x) + 3\,x^2$. Trouver une des équations différentielles possibles.

---

**Aufgabe / Problème 3:** Zwei Männer fahren in einem kleinen Motorboot. Die Masse der Passagiere und des Bootes ist 500 $kg$ und der Motor erzeugt eine konstante Kraft von $F = 200\ N$. Der Widerstand $R$ des Wasser sei proportional zur Geschwindigkeit $v$ des Bootes, mit einer Proportionalitätskonstante von $k = 10\ \frac{N\,s}{m}$.

Deux hommes utilisent un petit bateau avec une masse totale de 500 $kg$. Le moteur applique une force constante de $F = 200\ N$. La resistance $R$ (frottement) de l'eau et proportionalle à la vitesse $v$ du bateau avec une constante de proportionalitée de $k = 10\ \frac{N\,s}{m}$.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichug auf für die Geschwindigkeit $v\,(t)$.
Trouver une équation differentielle pour la vitesse $v\,(t)$.

(b) Skizzieren Sie das zu dieser Gleichung gehörende Vektorfeld.
Dessigner le champ véctorielle de cette équation.

(c) Nach langer Zeit wird sich eine Endgeschwindigkeit $v_\infty$ einstellen. Berechnen Sie diese.
Après un temps assez grand le bateau va atteindre une vitesse finalle $v_\infty$. Calculer cette vitesse.

(d) Das Boot startet. Wie lange dauert, es bis die Geschwindigkeit $0.9\ v_\infty$ erreicht wird und welche Strecke hat das Boot dann zurückgelegt?
Le bateau est lancé. Trouver le temps nécessaire pour atteindre la vitesses $0.9\ v_\infty$ est aussi la distance parcourru.

---

**Aufgabe / Problème 4:**

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$z = f(x,y) = \sin(x \cdot y) - x \cdot y^2$$

in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) = (\pi\,,\,1)$.

proche du point $(x_0, y_0) = (\pi\,,\,1)$.

(a) In welche Richtung (in $xy$–Ebene) hat die Fläche $z = f(x,y)$ die grösste Steigung und wie steil (als Winkel) ist die Fläche beim Punkt $(x_0, y_0)$?

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgerade der Tangential–Ebene an den Punkt $(x_0, y_0, ?)$ mit der $xy$–Ebene.

(a) Dans quel direction (dans le plan des $xy$) la surface monte le plus rapide possible et quel est l'angle de montée au point $(x_0, y_0)$?

(b) Trouver l'équation de la droite d'intersection du plan tangentiel au point $(x_0, y_0, ?)$ avec le plan des $xy$.

---

**Aufgabe / Problème 5:**

Die Leistung $P$, die in einem elektrischen Widerstand verbraucht wird, ist gegeben durch

La puissance $P$ consommé par une résistance électrique est donnée par

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Es gelte $U = 200\,V$ und $R = 8\,\Omega$. Die Rechnungen sind mit Hilfe von **linearen Approximationen** auszuführen.

Soit $U = 200\,V$ et $R = 8\,\Omega$. Calculer avec des **approximations linéaires**.

(a) Wie stark ändert sich die Leistung, wenn $\Delta U = -5\,V$ und $\Delta R = -0.2\,\Omega$ ?

(b) Wie stark ändert sich die Leistung maximal, wenn die relativen Fehler von $U$ und $R$ je 5% sind.

(a) Trouver la variation de la puissance, si on sait que $\Delta U = -5\,V$ et $\Delta R = -0.2\,\Omega$.

(b) Trouver la variation maximale de la puissance, si les erreurs relatives de $U$ et $R$ sont 5% .

---