F1 Algebra **Vordiplom**

Dr. Andreas Stahel
Ingenieurschule Biel
5. Oktober 1998, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Ein Tetraeder in R^3 hat die folgenden Eckpunkte:

Un tétraèdre dans $\mathbb{R}^3$ est donné par les points ci–dessous.

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders.

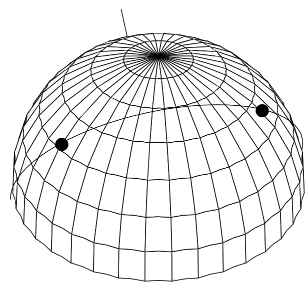
(b) Berechnen Sie die gesamte Oberfläche des Tetraeders.

(a) Calculer le volume du tétraèdre.

(b) Calculer la surface totale du tétraèdre.

Aufgabe / problème 2:

Rechts finden Sie eine Skizze der nördlichen Halbkugel der Erde mit Radius $R = 6300$ km. Ersichtlich sind die beiden Städte Zürich (CH) und Salt Lake City (USA). Deren geographische Lage ist unten tabelliert.
Soit la demie sphère nord de la terre à droite avec un rayon $R = 6300$ km. On donne la position de la ville de Zürich (CH) et de Salt Lake City (USA) dans la table ci–dessous.



	Breite latitude	Länge longitude
Zürich	47°	+8°
Salt Lake City	41°	−112°

Die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Städten auf der Erdoberfläche liegt auf einem Grosskreis, d.h. auf dem Schnitt der Kugel mit einer Ebene durch den Ursprung.

La liaison la plus courte entre les deux villes à la surface de la terre est dans un plan qui passe par l'origine et les deux villes, c.-à.-d. suivant un grand cercle.

(a) Stellen Sie die Lage der beiden Städte durch geeignete Vektoren in $\mathbb{R}^3$ dar.

(b) Berechnen Sie den Abstand der beiden Städte entlang der Verbindungsgeraden.

(c) Berechnen Sie den Abstand der beiden Städte entlang der Erdoberfläche.

(d) Finden Sie einen Normalenvektor der Ebene mit dem Grosskreis.

(e) Bestimmen Sie die maximale geographischer Breite auf dem Grosskreis zwischen den Städten.

(a) Représenter les positions des deux villes par des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(b) Trouver la distance entre les deux villes, mesurée le long d'une droite.

(c) Trouver la distance entre les deux villes, mesurée à la surface de la terre.

(d) Trouver un vecteur normal du plan avec ce grand cercle.

(e) Trouver la latitude maximale sur le grand cercle entre les deux villes.

Aufgabe / problème 3:

Lösen Sie das komplexe Gleichungssystem mit dem Algorithmus von Gauss. Die Zwischenresultate müssen angegeben werden.

Résoudre le système d'équations linéaires complexes à l'aide de l'algorithme de Gauss. Donner les résultats intermédiaires.

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ i & 3 & i \\ 2+i & 1+4i & i \end{array}\right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3i \\ 5+i \\ 3+9i \end{pmatrix}$$

Aufgabe / problème 4:

Eine affine Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben als Rotation um 30° um die Achse welche die Punkte $(1/0/1)$ und $(1/1/1)$ verbindet. Das Bild des Ursprunges liegt unterhalb der xy–Ebene.

(a) Stellen Sie G durch eine geeignete 4×4–Matrix mit homogenen Koordinaten dar. Es kann nützlich sein, die Abbildung in mehrere, einfachere Abbildungen zu zerlegen.

(b) Finden Sie das Bild des Punktes $P = (1/2/-4)$.

Une application affine $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est donnée comme rotation de 30° par rapport à l'axe passant par les points $(1/0/1)$ et $(1/1/1)$. L'image de l'origine se trouve au–dessous du plan xy.

(a) Représenter G par une matrice 4×4 en utilisant des coordonnées homogènes. Il peut être utile d'écrire l'application comme une composition de plusieures applications plus simples.

(b) Touver l'image du point $P = (1/2/-4)$.

Aufgabe / problème 5:

In der geometrischen Optik können folgende Vektoren untersucht werden.

En optique géométrique, on peut utiliser les vecteurs

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Abstand von der optischen Achse} \\ \text{Winkel bezüglich optischer Achse} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{distance de l'axe optique} \\ \text{angle par rapport à l'axe optique} \end{pmatrix}$$

Alle Lichtwege werden von links nach rechts durchlaufen. Als Beispiele untersuchen wir die folgenden optischen Elemente.

(a) Ein freies Wegstück der Länge s

(b) Ein kugelförmiger Körper mit Radius R. Der Radius R gilt positiv zu wählen, wenn die brechende Fläche zum eintreffenden Strahl hin gewölbt ist, als negativ, wenn sie in Strahl–Richtung konkav ist.

Es ergeben sich dann die Transfermatrizen in der folgenden Tabelle.

Tous les rayons de lumière vont de gauche à droite. Comme exemples, examinons les éléments optiques suivants.

(a) Un chemin libre de longueur s.

(b) Un solide sphérique avec rayon R. Choisir R positif si la surface se boucle contre la direction du trait, R est négatif si la surface se boucle dans la direction du rayon incident.

On arrive alors aux matrices de transfert de la table ci–dessous.

Beschreibung / description	Matrix/matrice
Ausbreitung, Strecke s distance à parcourir s	$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Sphärischer Körper, Radius R Brechungsindex links n_1, rechts n_2 Solide sphérique, rayon R Indices de réfraction: à gauche n_1, à droite n_2	$S(R, n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Parallele Lichtstrahlen treffen auf eine Kugel mit Radius $r = 1$ cm. Das Material hat einen Brechungsindex $n = 1.4$. Alle Strahlen sind nahe der Kugelachse.

(a) Stellen Sie die Transfermatrix $M(x)$ dieses optischen Systems auf.

(b) In welchem Abstand x von der Kugel befindet sich der Brennpunkt?

Des rayons lumineuse paralèlles passent par une spère (rayon $r = 1$ cm) dont l'indic de réfraction est $n = 1.4$. Tous les rayons sont proche de l'axe de la spère.

(a) Trouver la matrice de transfert $M(x)$ de ce système optique.

(b) A quelle distance x de la boule se trouve le foyer?