F1 Algebra **Vordiplom**

Dr. Andreas Stahel
Ingenieurschule Biel
6. Oktober 1997, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

(a) Verwenden Sie die Gleichung
Utiliser deux fois l'équation

$$1 - e^{i\,k} = e^{i\,\frac{k}{2}}\,\left(e^{-i\,\frac{k}{2}} - e^{i\,\frac{k}{2}}\right) = -2\,i\,e^{i\,\frac{k}{2}}\,\sin\left(\frac{k}{2}\right)$$

zwei mal (mit verschiedenen Werten für k), um die Summe
avec des valeurs differentes de k, pour réécrire la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i\,k\,\alpha}$$

als Bruch von zwei Termen zu schreiben. Der Nenner muss reell sein.
comme fraction de deux termes simples. Le dénominateur doit être réel.

(b) Mit Hilfe des Resultates von (a) ist die folgende Formel herzuleiten.
À l'aide du résultat (a) trouver la formule

$$\sin\alpha + \sin(2\,\alpha) + \sin(3\,\alpha) + \ldots + \sin(n\,\alpha) = \frac{\sin(\frac{n}{2}\alpha)\,\sin(\frac{n+1}{2}\,\alpha)}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

Aufgabe / problème 2:

Gegeben sind zwei Punkte durch $\vec{A} = (1,2,5)$ und $\vec{B} = (7,4,3)$ und die parametrisierte Gerade g durch

Examiner les deux points $\vec{A} = (1,2,5)$ et $\vec{B} = (7,4,3)$ et la droite g donnée par la paramétrisation

$$g\ :\qquad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} + t\,\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie einen Punkt $\vec{C}$ auf der Geraden g, sodass das Dreieck ABC gleichschenklig wird. ($AC = BC$).

(b) Bestimmen Sie die Fläche dieses Dreiecks.

(a) Trouver un point $\vec{C}$ sur la droite g tel que le triangle ABC soit isocèle. ($AC = BC$).

(b) Calculer l'aire de ce triangle.

Aufgabe / problème 3:

Soit

Sei

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Il existe une valeur de α, tel que la matrice $A(\alpha)$ n'est pas inversible. trouver cette valeur.

(b) Avec la valeur de α trouver ci–dessus, trouver tous les solutions de l'équation lineaire $A(\alpha)\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Trouver toutes les solutiones du système suivant, d'une façon exacte.

(a) Es gibt einen Wert von α, sodass die Matrix $A(\alpha)$ nicht invertierbar ist. Finden Sie diesen Wert.

(b) Für den oben gefundenen Wert von α sind alle Lösungen der linearen Gleichung $A(\alpha)\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen.

(c) Finden Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems. Die Lösungen müssen exakt sein.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe / problème 4:

Une application affine $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transforme le triangle ABC avec $A(0,0)$, $B(2,0)$ et $C(1,3)$ en le nouveau triangle $A'B'C'$ avec $A'(\frac{3}{4}, \frac{-5}{2})$, $B'(\frac{7}{4}, -1)$ et $C'(\frac{7}{2}, \frac{23}{4})$. On a

Durch eine affine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ wird das Dreieck ABC mit $A(0,0)$, $B(2,0)$ und $C(1,3)$ in das neue Dreieck $A'B'C'$ abgebildet mit $A'(\frac{3}{4}, \frac{-5}{2})$, $B'(\frac{7}{4}, -1)$ und $C'(\frac{7}{2}, \frac{23}{4})$. Es gilt

$$F(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{c}$$

Donner des résultats exacts (sans calculatrice).

(a) Trouver le vecteur $\vec{c}$ et la matrice M.

(b) Calculer les valeurs et vecteurs propres de cette matrice M.

(c) L'application F ci–desus transforme le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$ en une ellipse. Dessiner cette ellipse.

(d) Trouver les longueurs des demi–axes de cette ellipse et l'aire.

Die Resultate sind exakt anzugeben (ohne Taschenrechner).

(a) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{c}$ und die Matrix M.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M.

(c) Die Abbildung F transformiert den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ in eine Ellipse. Zeichnen Sie diese Ellipse.

(d) Bestimmen Sie die Längen der Halbachsen und die Fläche der Ellipse.

Aufgabe / problème 5:

L'équation d'un cercle est

Eine Kreisgleichung hat die Form

$$a\,(x^2+y^2)+b\,x+c\,y+d=0$$

Ce cercle passe par les points

Dieser Kreis geht durch die Punkte

$$P_1=(5/3)\quad,\quad P_2=(-2/2)\quad \text{et/und}\quad P_3=(-1/3)$$

(a) Trouver un système d'équations pour les coefficients a, b, c et d.

(b) Réécrire ce système sous la forme d'une matrice augmentée.

(c) Transformer cette matrice sous la forme d'une échelle. Tous les nombres doivent être des nombres entiers.

(d) Donner une formule explicite pour calculer **toutes** les solutions de ce système; pas besoin de calculer les solutions.

(a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die Koeffizienten a, b, c und d.

(b) Schreiben Sie dieses Gleichungssytem in der Form einer erweiterten Matrix.

(c) Bringen Sie die Matrix in Treppengestalt. Hierbei sollen alle Zahlen ganz sein.

(d) Geben Sie eine Formel um **alle** Lösungen des Gleichungssystems auszurechnen. Es ist nicht notwendig die Lösungen auszurechnen.

Aufgabe / problème 6:

In der geometrischen Optik können folgende Vektoren untersucht werden.

En optique géométrique, on peut utiliser les vecteurs

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Abstand von der optischen Achse} \\ \text{Winkel bezüglich optischer Achse} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{distance de l'axe optique} \\ \text{angle par rapport à l'axe optique} \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich dann die folgenden Transfermatrizen

On arrive a des matrice de transfert suivantes

Beschreibung/déscription	Matrix/matrice
Ausbreitung, Strecke s distance à parcourir s	$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
konkave dünne Linse, Brennweite f lentille concave, longueur focale f	$L(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$

Tabelle 1: Zwei Transfermatrizen in der geometrischen Optik

Bei einer einfachen geometrischen Anordnung sind ein 2 cm grosses Objekt und der Projektionsschirm 50 cm voneiander entfernt. Eine dünne Linse mit Brennweite f sei x cm vom Objekt entfernt. Der Lichtstrahl geht vom Objekt zum Schirm, via Linse. Das auf dem Kopf stehende Bild soll 40 cm gross werden.

Dans une situation simple on a un objet de largeur 2 cm et un écran à une distance de 50 cm . Une lentille de longueur focale f se trouve à une distance de x cm de l'objet. Des traits de lumière passent de l'objet à l'écran par la lentille. L'image de l'objet est inversée et a une largeur de 40 cm .

(a) Stellen Sie die Transfermatrix $M(x, f)$ dieses optischen Systems auf.

(b) Erklären Sie, weshalb diese Matrix die untenstehende Form haben muss, d.h. $A = -20$ und $B = 0$.

(a) Trouver la matrice de transfert $M(x, f)$ de ce système optique.

(b) éxpliquer pourquoi la matrice $M(x, f)$ doit être de la forme donnée ci–dessous, veut dire $A = -20$ et $B = 0$.

$$M(x) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(c) Verwenden Sie den Determinantenmultiplikationssatz und $B = 0$ um zu zeigen, dass $D = 1/A$.

(d) Bestimmen Sie $\frac{x}{f}$, mit Hilfe von $D = -1/20$. Bestimmen Sie anschliessend x, mit Hilfe von $B = 0$

(c) Utiliser le théorème des multiplication des déterminant et $B = 0$ pour montrer que $D = 1/A$.

(d) Trouver $\frac{x}{f}$ à l'aide de $D = -1/20$. Puis trouver x à l'aide de $B = 0$
