F1 Algebra/Algèbre **Prüfung/Épreuve 4**

Dr. A. Stahel 2.9.1998

Aufgabe / Problème 1:

Eine affine Transformation $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von der Ebene in die Ebene ist gegeben durch die Transformationsmatrix

Une application affine $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ du plan dans le plan est donné par la matrice de transformation

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Das Dreieck ABC mit den drei Punkten $A = (1/2)$, $B = (0/3)$ und $C = (1/-1)$ wird durch diese Transformation in ein neues Dreieck abgebildet. Bestimmen Sie die Ecken des neuen Dreiecks.

(b) Es gibt genau einen Punkt $(x, y)^T$ der durch die Abbildung F nicht verändert wird. Finden Sie ihn.

(a) Le triangle ABC avec les trois coins $A = (1/2)$, $B = (0/3)$ et $C = (1/-1)$ est transformé dans un nouveau triangle par cette application. Trouver les coins de ce nouveau triangle.

(b) Il y a un seul point $(x, y)^T$ dont la position ne change pas par l'application F. Touver ce point.

Aufgabe / Problème 2:

La matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ est donnée par

Die Matrix einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Trouver une déscription de cette transformation à l'aide des valeurs et vecteurs propres. Écrire l'application comme composition des rotations et allongement dans la direction des axes.

(b) Le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est transformé dans une nouveau figure. Esquisser cette nouveau figure.

(a) Beschreiben sie den Effekt dieser Abbildung mit Hilfe von Eigenvektoren und Eigenwerten als Komposition von Drehungen und Streckungen in die Richtung der Koordinatenachsen.

(b) Der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ wird auf eine neue Figur abgebildet. Zeichnen Sie diese neue Figur.

Aufgabe / Problème 3:

Mit einem gegebenen Polynom $p \in \mathbb{P}_2$ werden die folgenden Operatioen ausgeführt.

1. zuerst mit $(1 - 2\,x)$ multiplizieren
2. anschliessend ableiten bezüglich x

Das Resultat ist ein Polynom $F(p) \in \mathbb{P}_2$

Avec un polynôme $p \in \mathbb{P}_2$ on fait les opérations suivantes

1. d'abord multiplier par $(1 - 2\,x)$
2. puis calculer la dérivé par rapport à x

Le résultat est un polynômes $F(p) \in \mathbb{P}_2$

(a) Stellen Sie diese lineare Abbildung $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ durch eine geeignete Matrix dar.

(b) Berechnen Sie das Resulat, falls man $p(x) = -x^2 + 2\,x - 3$ setzt.

(c) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{P}_2$, so dass als Resultat der Abbildung F das Polynom $x^2 - 3\,x$ erscheint.

(a) Représenter cette application linéaire $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ par une matrice adaptée.

(b) Trouver le résultat si on met $p(x) = -x^2 + 2\,x - 3$.

(c) Trouver un polynôme $f \in \mathbb{P}_2$, tel que le résultat de l'application F est le polynôme $x^2 - 3\,x$.

Aufgabe / Problème 4:

Eine affine Abbildung $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben als Spiegelung an der Geraden $y = 1+2\,x$. Stellen Sie G durch eine geeignete 3×3–Matrix mit homogenen Koordinaten dar. Es kann nützlich sein, die Abbildung in mehrere, einfachere Abbildungen zu zerlegen.

Une application affine $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est donnée comme réflexion à la droite $y = 1 + 2\,x$. Representer G par une matrice 3×3 en coordonnées homogène. Il peut être utile d'écrire l'application comme composition de plusieures applications simples.
