F1 Algebra/Algèbre **Prüfung/Épreuve 3**

Dr. A. Stahel 17.6.1998

Aufgabe / Problème 1:

Für ein Matrix

Pour une matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gilt

on a

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie A **exakt**.

(b) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf für die vier Koeffizienten der Matrix A.

(a) Trouver A d'une façon **exacte**.

(b) Chercher un système des équations linéaires pour les quatres coefficients de la matrice A.

Aufgabe / Problème 2:

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

Trouver les valeurs des déterminantes suivantes

(a)

$$a = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$b = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 16 & 6 & 1998 \end{bmatrix}$$

(c)

$$c = \det \begin{bmatrix} n & n & n & n & n & \dots & n & n \\ n-1 & n & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & n-2 & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & 0 & n-3 & n & 0 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix}$$

Tip: Subtrahieren Sie die zweite Zeile von der ersten, dann ...

Tip: substraction de la deuxième ligne de la première, puis ...

Aufgabe / Problème 3:

Untersuchen Sie das Gleichungssystem

Examiner le système des éqations

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2\,x_2 & +3\,x_3 & +4\,x_4 & = & -2 \\ -x_1 & +2\,x_2 & & +3\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Der Befehl **LU**, angewandt auf die Matrix

La commande **LU**, appliquée sur la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt

rend

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystem mit Hilfe der Matrizen L und U. Die Rechnungen sind ohne Taschenrechner auszuführen.

Trouver toutes les solutions de ce système à l'aide des matrices L et U. Travailler sans calculatrice.

Aufgabe / Problème 4:

Une courbe de la forme ci–dessous doit passer par les points P_i donnés le plus proche possible, veut dire

Eine Kurve von der unten gegebenen Form soll möglichst gut durch die gegebenen Punkte P_i gehen, d.h.

$$\|\vec{r}\|^2 = \sum_{k=1}^{5} r_k^2 = \sum_{k=1}^{5} \left(f\left(x_k\right) - y_k\right)^2 \quad \text{minimal}$$

avec

wobei

$$f\left(x\right) = A\,\cos x + B\,\sin x + C$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.45 \end{pmatrix} \quad , \quad P_3 = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.4 \end{pmatrix} \quad , \quad P_5 = \begin{pmatrix} \pi \\ -3.4 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie den Residualvektor als Ausdruck der Form

Écrire le vecteur résiduel dans la forme

$$\vec{r} = \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - \vec{y}$$

(a) Trouver un système de trois équations linéaire pour les constantes A, B et C.

(b) Calculer A, B et C.

(a) Finden Sie ein System von drei linearen Gleichungen für die Konstanten A, B und C.

(b) Berechnen Sie A, B und C.

Aufgabe / Problème 5:

(a) Entscheiden Sie, ob die Polynome p_i linear abhängig sind in $\mathbb{P}_3$.

(a) Decider si les polynômes p_i sont linéairement dépendents dans $\mathbb{P}_3$.

$$p_1(x) = 1 + x \quad , \quad p_2\,(x) = x^3 - 13x \quad , \quad p_3\,(x) = 1 + 3\,x + x^3 \quad \text{und/et} \quad p_4\,(x) = 2\,x + 7\,x^3$$

(b) Für welchen Wert von a sind die Polynome f_i linear abhängig sind in $\mathbb{P}_3$?

(b) Pour quel valeur de a sont les polynômes f_i linéairement dépendents dans $\mathbb{P}_3$?

$$f_1(x) = 1 + x \quad , \quad f_2\,(x) = x^2 - 2\,x \quad , \quad f_3\,(x) = 1 + x^2 + x^3 \quad \text{und/et} \quad f_4\,(x) = 2\,x + a\,x^3$$