F1 Algebra/Algèbre **Prüfung/Épreuve 1**

Dr. A. Stahel 18.12.1997

Aufgabe / Problème 1:

Utiliser une démonstration par récurrence pour prouver la **somme géométrique**

Zeige mittels vollständiger Induktion, dass für die **geometrische Summe** gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

si $q \neq 1$.

falls $q \neq 1$.

Aufgabe / Problème 2:

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

Calculer les expressions suivantes

(a)

$$a = \sum_{k=-19}^{20} 2\,k^3$$

(b)

$$b = \sum_{j=0}^{3} \left(\prod_{k=1}^{j} k \right)$$

(c)

$$c = \sum_{j=0}^{3} \left(\prod_{k=1}^{j} 2\,j \right)$$

(d)

$$d = \sum_{k=0}^{n} 2\,k$$

Aufgabe / Problème 3:

(a) Soit $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \cdot z_2$ d'une façon **exacte** (sans calculatrice).

(b) Soit $G \subset \mathbb{C}$ le deuxième quadrant dans le plan complexe, c.-à-d. les nombres $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ avec $x < 0$ et $y > 0$. Calculer les racines de tous ces nombres en G et dessiner cette nouveau domaine.

(a) Sei $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Bestimmen Sie $z_1 + z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ **exakt**, d.h. ohne Taschenrechner.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ der zweite Quadrant in der komplexen Ebene, d.h. alle Zahlen $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $x < 0$ und $y > 0$. Ziehen Sie die Quadratwurzel $\sqrt{z}$ aus allen Zahlen in G und skizzieren Sie den entstehenden Bereich.

Aufgabe / Problème 4:

Drücken Sie $\cos(4\alpha)$ durch Terme mit $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ aus. Finden und beweisen Sie die Formel. Tip: Eulersche Formel und

Exprimer $\cos(4\alpha)$ en terme de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$. Trouver et prouver cette identité. Tip: formule de Euler et

$$(x+y)^4 = x^4 + 4\,x^3\,y + 6\,x^2\,y^2 + 4\,x\,y^3 + y^4$$

Aufgabe / Problème 5:

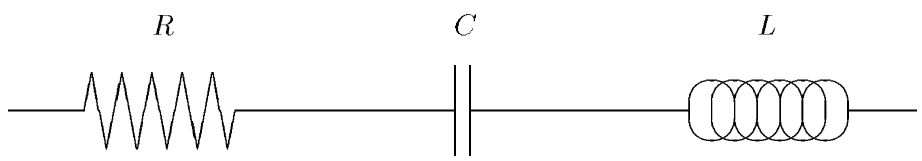
Beweisen Sie, dass $\sqrt[3]{13} \notin \mathbb{Q}$

Prouver que $\sqrt[3]{13} \notin \mathbb{Q}$

Aufgabe / Problème 6:

Es werden drei Elemente in Serie geschaltet. Die Werte von R, C und L seien bekannt.

Mettre trois éléments en série. Les valeurs de R, C et L sont données.



(a) Berechnen die komplexe Gesamtimpedanz Z als Funktion von ω.

(b) Für welchen Wert von ω erzeugt diese Schaltung keine Phasenverschiebung?

(c) Für welchen Wert von ω ist die Impedanz $|Z|$ minimal? Finden den minimalen Wert.

(a) Trouver l'impédance complexe Z comme fonction de ω.

(b) Pour quel valeur de ω ce circuit rend une déphasage de 0?

(c) Pour quel valeur de ω l'impédance $|Z|$ est minimale? Trouver cette valeur minimale.
