F1 Algebra/Algèbre **Prüfung/Épreuve 4**

Dr. A. Stahel 21.5.1997

Aufgabe / Problème 1:

On sait que le système ci–dessous a au moins une solution.

Man weiss, dass das untenstehende System mindestens eine Lösung hat.

$$A\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ q \end{pmatrix} = \vec{b}$$

(a) Trouver le valeur de q.

(b) Donner tous les solutions du système homongène.

(c) Donner tous les solutions du système inhomongène.

(a) Bestimmen Sie den Wert von q.

(b) Finden Sie alle Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

(c) Finden Sie alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems.

Aufgabe / Problème 2:

Untersuchen Sie die drei folgenden Polynome im Vektorraum $\mathbb{P}_2$.

Examiner les trois polynômes ci–dessous.

$$f_1\,(x) = 2 + x - x^2 \quad , \quad f_2\,(x) = 1 + 2\,x + x^2 \quad \text{und/et} \quad f_3\,(x) = -1 + x + 3\,x^2$$

(a) Zeigen Sie, dass die drei Polynome linear unabhängig sind.

(b) Schreiben Sie $g\,(x) = 3\,x$ als Linearkombination der $f_i\,(x)$.

(a) Montrer que ces trois polynômes sont linéairement indépendent.

(b) Écrire $g\,(x) = 3\,x$ comme combinaison linéaire des $f_i\,(x)$.

Aufgabe / Problème 3:

Untersuchen die die $n \times n$–Matrix

Examiner la matrice $n \times n$

$$A\,(n) \quad = \quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Es gilt

On a

$$\det A\,(1) = a \quad \text{und/et} \quad \det A\,(2) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 - b^2$$

(a) Berechnen Sie $\det A(3)$.

(b) Es gibt Zahlen c_1 und c_2 sodass die untenstehnde Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Finden Sie c_1 und c_2.
Tip: zwei mal entwickeln nach geeigneten Zeilen oder Spalten.

(a) Calculer $\det A(3)$.

(b) Il existe des nombres c_1 et c_2 tel que la formule ci–dessous est juste pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver c_1 et c_2.
Tip: deux développement par rapport à des lignes ou columnes biens choisi.

$$\det A(n) = c_1 \det A(n-1) + c_2 \det A(n-2)$$
