F1 Analysis **Vordiplom**

Dr. Andreas Stahel
Ingenieurschule Biel
7. Oktober 1997, 8:00 – 11:00

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

Calculer les expressions suivantes

(a) $A = \frac{d}{dx}\left(x\, e^{-x^2}\right)$

(b) $B = \int x\, e^{-x^2}\, dx$

(c) $C = \frac{d}{dx}\left(\cos\, x - \cos\,(3\,x)\right)^5$

(d) $D = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh 3\,x}{x}$

(e) $E = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh 3\,x}{x^2}$

Aufgabe 2:

La fonction tangente hyperbolique est donnée par

Die Hyperbeltangens–Funktion ist gegeben durch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(a) Exprimer $\tanh x$ à l'aide de la fonction exponentielle.

(b) Montrer que, à cause de $e^x > 0$, on a toujours $-1 < \tanh x < 1$.

(c) Montrer que la fonction est strictement croissante.
Tip: dérivée et partie (b).

(d) Trouver une bonne approxiamtion de $\tanh x$ par un polynôme de degré 2 pour des valeurs petites de $|x|$.

(e) **Déduire une formule** pour calculer la valeur de x en utilisant la valeur z et l'identié $z = \tanh x$. Utiliser seulement des fonctions exponentielles et logarithmiques.
Tip: résoudre pour x.

(a) Drücken Sie $\tanh x$ nur mit Hilfe der Exponentialfunktion aus.

(b) Zeigen Sie, dass wegen $e^x > 0$ immer gilt $-1 < \tanh x < 1$.

(c) Zeigen Sie, dass diese Funktion strikt monoton wachsend ist.
Tip: Ableitung und Teil (b).

(d) Finden Sie eine gute Approximation von $\tanh x$ durch ein Polynom vom Grade 2 für kleine Werte von $|x|$.

(e) **Leiten Sie eine Formel her**, um aus dem gegebenen Wert von z und der Beziehung $z = \tanh x$ den Wert von x zu bestimmen. Sie dürfen nur Exponential– und Logarithmusfunktionen verwenden.
Tip: Auflösen nach x.

Aufgabe 3:

Examiner la surface dans le demi–plan $y > 0$, mais au–dessous de la parabole $y = 2x - x^2$. Cette surface est coupée en deux par une droite $y = a\,x$. Trouver la valeur de a, telle que les deux sections ont la même aire.

Untersuchen Sie den Bereich in der oberen Halbebene, aber unter der Parabel $y = 2x - x^2$. Er wird durch eine Gerade $y = a\,x$ zerschnitten. Wie gross ist a zu wählen, damit das Flächenstück halbiert wird?

Aufgabe 4:

Soit f la longueur focale d'une lentille. Un object se trouve à une distance u de la lentille et l'image se trouve à une distance v de la lentille. Utiliser

Die Brennweite einer Linse sei f. Befindet sich ein Objekt um u von der Linse entfernt, so finden Sie das Bild des Objektes in einer Distanz v, wobei

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} - \frac{1}{f}$$

Utiliser une approximation linéaire.

(a) Soit $f = 0.75$ [m] et $u = 1.25$ [m]. Trouver la variation Δv de v d'une façon approximative, si la distance u change de u à $u + \Delta u$.

(b) Trouver Δv si u change de 1.25 à 1.3 [m].

Verwenden Sie eine lineare Approximation.

(a) Sei $f = 0.75$ [m] und $u = 1.25$ [m]. Bestimmen Sie die Änderung Δv von v approximativ, falls der Abstand u um Δu variiert.

(b) Wie gross ist Δv falls u von 1.25 auf 1.3 [m] ändert?

Aufgabe 5:

Une voiture roule pendant une heure ($0 < t < 1$) à une vitesse de $v = 200\,t\,(1-t)$ (en kilomètres par heure). La consommation d'essence f (en litres par kilomètre) dépend de la vitesse v par la formule $f = v^2 10^{-4}$. Trouver

(a) la distance parcourue.

(b) la consommation totale d'essence.

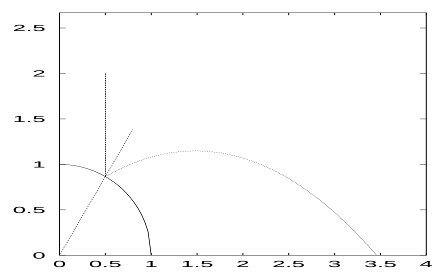
Ein Auto fährt eine Stunde lang ($0 < t < 1$) mit einer Geschwindigkeit von $v = 200\,t\,(1-t)$ (in Kilometern pro Stunde). Der Bezinverbrauch f (in Liter pro Kilometer) hängt von der Geschwindigkeit ab gemäss der Formel $f = v^2 10^{-4}$. Bestimmen Sie

(a) die zurückgelegte Distanz

(b) den totalen Benzinverbrauch

Aufgabe 6:

Ein zylinderförmiger Öltank mit Radius 1 m ist zur Hälfte eingegraben. Auf einer Höhe von 2 m und in einer horizontalen Distanz von 0.5 m von der Zylinderachse (beim Punkt (0.5 , 2)) wird ein Ball losgelassen. Er wird den Tank treffen und von dort wieder aufspringen. Der Ball sei ideal elastisch, d.h. die Schnelligkeit vor und nach dem Auftreffen sind gleich. Alle Rechnungen können mit drei signifikanten Stellen ausgeführt werden



(a) Wo und mit welcher Geschwindigkeit trifft der Ball den Tank.

(b) Beim Aufprall gilt das Gesetz: der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallsswinkel. Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigikeit (als Vektor) der Wurfparabel nach dem Aufprall.

(c) Geben Sie eine Parametrisierung der Wurfparabel des Balles nach dem Auftreffen auf dem Tank. Tip: entlang der Wurfparabel gilt $\ddot{x}(t) = 0$ und $\ddot{y}(t) = -g$

(d) Wo trifft der Ball auf den Boden auf?

Une petite balle élastique tombe de 2 mètres sur un réservoir cylindrique à moitié enterré. Les coordonnées du point initial sont $(0.5\,,\,2)$. Le rayon du réservoir est de 1 mètre. Le ballon arrive au réservoir avec une certaine vitesse, et repart avec la même vitesse. Calculer avec trois chiffres significatifs.

(a) Trouver le point de contact et la vitesse à ce moment.

(b) L'angle de rebondissement est le même que l'angle d'incidence. Trouver la vitesse initiale (comme vecteur) de la trajectoire de la balle après son contact avec le réservoir.

(c) Trouver une paramétrisation de la trajectoire de la balle après son contact avec le réservoir. Indication: on sait que $\ddot{x}(t) = 0$ et $\ddot{y}(t) = -g$.

(d) Calculer la position P de la balle lorsqu'elle touche le sol.
