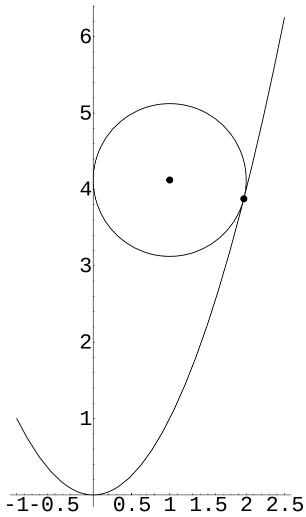
F1 Analyse/Analysis **Prüfung/Épreuve 3**

Dr. A. Stahel 13.5.2004

Aufgabe / Problème 1:

Untersuchen Sie Kreise mit Radius $R = 1$, tangential an den Graphen von $y = x^2$.



(a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Kreismittelpunktes $\vec{M}$ als Funktion von x. Der Kontaktpunkte liegt bei $(x\,,\,x^2)$. Der Kreis ist tangential zur Kurve und liegt oberhalb der Kurve.

(b) Berechnen Sie die Koordinate x_s des Berührpunktes, falls der Kreis auch die y–Achse berührt. Diese Situation ist in der Graphik rechts gezeichnet. Anschliessend sind die Mittelpunktskoordinaten anzugeben.
Es ist erlaubt/notwendig den Taschenrechner zu verwenden.

Examiner les cercles de rayon $R = 1$, tangentiel au graphe de la fonction $y = x^2$.

(a) Trouver les coordonnées du centre $\vec{M}$ du cercle comme fonction de x. Le point de contact est $(x\,,\,x^2)$. Le cercle est tangentiel á la courbe et au–dessus de la courbe.

(b) Trouver la coordonnées x_s du point de contact, si le cercle aussi touche l'axe des y. Cette situation est esquissée à droite. Puis trouver le centre du cercle.
Il est permis/nécessaire d'utiliser la calculatrice.

Aufgabe / Problème 2:

Calculer les intégrales suivantes **exactement**, montrer les pas intermédiaires (sans calculatrice).

Berechnen Sie die folgenden Integrale **exakt**. Die Rechnungen sind zu zeigen, d.h. kein Taschenrechner.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^3 \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{x^2}\;dx \\
B &= \int_{-3}^3 x\,e^{-x^2}\;dx \\
C &= \int_0^2 e^{2x}\;\cosh e^{2x}\;dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\phi}{1+\cos^2\phi}\;d\phi \\
E &= \int_0^4 \sin(x-2)\,e^{(x-2)^2}\;dx
\end{aligned}
$$

Tip: Zeichnen und denken.
Tuyau: Dessiner et réfléchir

Aufgabe / Problème 3:

Untersuchen Sie die Kurve

Examiner la courbe

$$y(x) = \cosh(x) \quad \text{für/pour} \quad 0 \le x \le 2$$

(a) Geben Sie das Integral an, um die Länge dieser Kurve zu bestimmen.

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals.

(c) Zerlegen Sie das Intervall $[0, 2]$ in vier Teilintervalle gleicher Länge und verwenden Sie das Verfahren von Simpson um das obige Integral approximativ zu bestimmen.

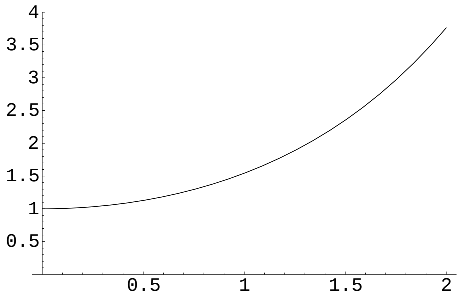
(d) Bestimmen Sie eine obere Schranke für den Fehler in der obigen numerischen Rechnung.
Tipp: $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$

(a) Donner l'intégral pour la longueur de cette courbe.

(b) Calculer la valeur de cette intégrale.

(c) Divider l'intervalle $[0, 2]$ en quatre sections de même longueur. Puis trouver une approximation à l'aide de la formule de Simpson.

(d) Trouver une borne maximal pour l'erreur de l'approximation ci–dessus.
Tip: $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$

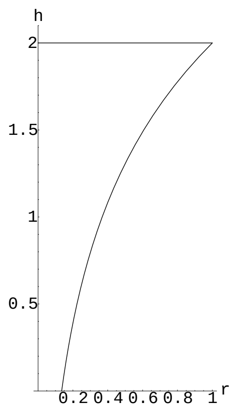


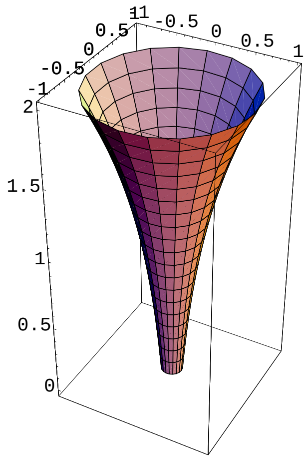
Aufgabe / Problème 4:

Die Fläche zwischen der Kurve und der h–Achse wird um die vertikale Achse rotiert. Es entsteht ein Konus mit kreisförmigen Schnitten. Die Figur rechts zeigt nur die Aussenfläche. Der Radius r als Funktion der Höhe h ist gegeben durch

$$r(h) = e^{h-2} \quad \text{für/pour} \quad 0 \leq h \leq 2$$

La fonction ci–dessus rend le rayon r d'un solide avec des sections circulaire comme fonction de la hauteur h. La section entre la courbe et l'axe des h fait des révolution autour l'axe verticale. On obtien un solid conique. La graphique montre la surface extérieure.





(a) Berechnen Sie die gesamte Masse M. Die Dichte ρ sei bekannt.

(b) Stellen Sie ein Integral auf um die Gewichtkraft $F(H)$ zu bestimmen, welche durch die Masse unterhalb der Höhe H erzeugt wird.

(c) Berechnen Sie die Spannung τ (Kraft pro Fläche) in einem Schnitt bei $h = H$.

(a) Trouver la masse totale M. La densité ρ est connue.

(b) Donner un intégrale pour calculer la force de gravitation $F(H)$, crée par la section de la cône au–dessous de la hauteur H.

(c) Trouver la tension τ (force par aire) dans une section à une hauteur de $h = H$.
