F1 Analysis / analyse
Vordiplom / examen propédeutique

Dr. Andreas Stahel
HTA Biel
9. September 2003, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Calculer les expressions suivantes d'une façon exacte (sans calculatrice).

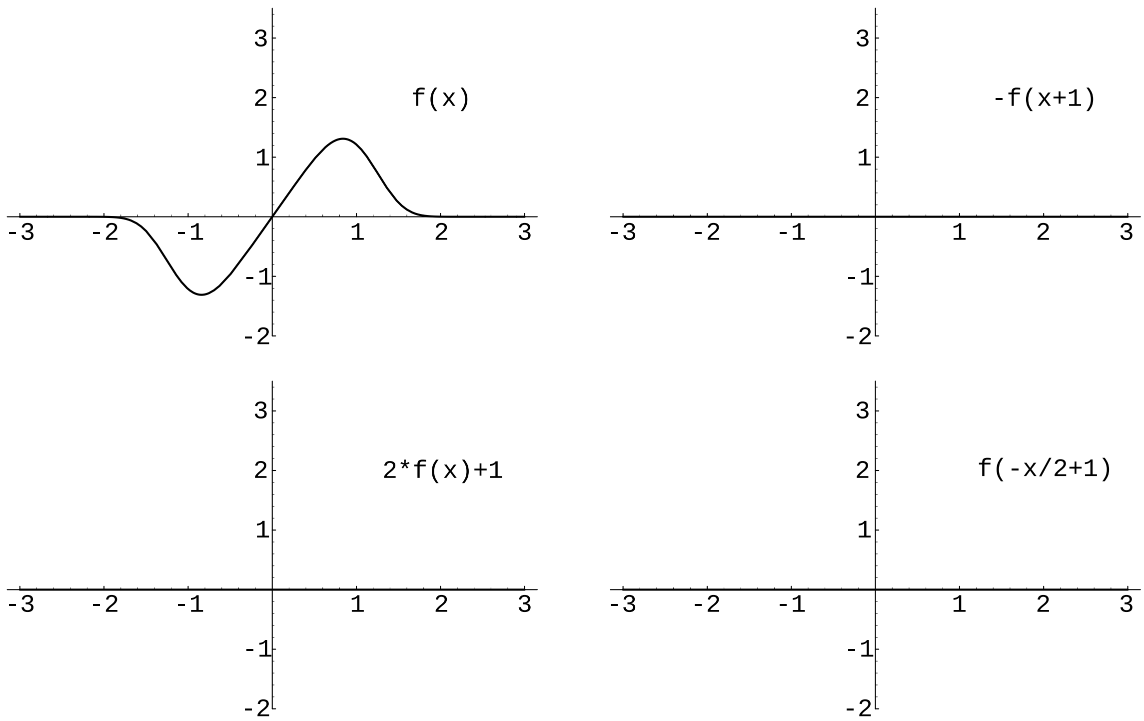
Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke exakt (ohne Taschenrechner).

$$a = \frac{d}{dx}\left(x^3 - e^{\sin(3\,x)}\right)$$
$$b = \frac{d^{1001}}{dx^{1001}}\,\cos(3\,x)$$
$$c = \int_1^5 \cos(3\,t) + \frac{1}{3}\,t^3\,dt$$
$$d = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\,x} + \sin(x^3)\,dx$$

Aufgabe / problème 2:

Vous trouver ci–dessous le graphe d'une fonction $f(x)$. Esquisser les graphes des trois fonctions données.

Unten finden Sie den Graphen einer Funktion $f(x)$. Zu zeichnen sind die Graphen der drei angegebenen Funktionen.



Aufgabe / problème 3:

Die Bremskraft K einer Wirbelstrombremse ist durch die Gleichung

La force d'un frein à courant de Foucault est donnée par

$$K(v) = \frac{a^2\,v}{v^2 + b^2}$$

als Funktion der Geschwindigkeit $v \geq 0$ gegeben. Die Konstanten a und b sind positiv.

(a) Bei welcher Geschwindigkeit v ist die Bremskraft am grössten?

(b) Wie gross ist dann die Bremskraft?

comme fonction de la vitesse $v \geq 0$. a et b sont des constantes positives.

(a) Pour quelle vitesse v la force est-elle le plus grande possible?

(b) Quelle est la valeur maximale de la force?

Aufgabe / problème 4:

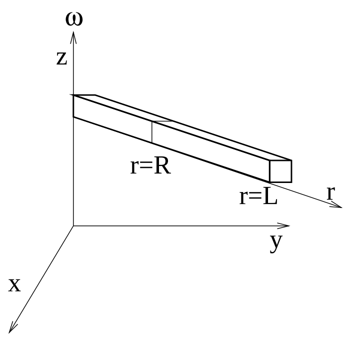
Ein Balken der Länge L mit Querschnittsfläche A wird gemäss der untenstehenden Figur um die z–Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Der Balken ist an der z–Achse befestigt und liegt immer parallel zur xy–Ebene. Die spezifische Masse ρ ist gegeben.

Une poutre de longueur L et de section A est tournée autour l'axe des z avec une vitesse angulaire ω comme indiqué dans l'esquisse ci–dessous. La poutre est fixée sur l'axe des z et est toujours parallèle au plan xy. La masse spécifique ρ est donnée.

Physik: Wird eine Punktmasse m im Abstand r um eine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, so wirkt eine Zentrifugalkraft der Stärke

$$F = m\, r\, \omega^2$$

Physique: Si un point de masse m à une distance r est tournée sur une axe avec vitesse angulaire ω, on a une force centrifuge F donné par la formule ci–dessus.



(a) Bestimmen Sie die in diesem System steckende Rotationsenergie mit Hilfe eines Integrals.

(b) Bei einem Schnitt mit Abstand R von der z–Achse wirkt eine Kraft $F(R)$ aufgrund der weiter aussen rotierenden Masse. Bestimmen Sie diese mit einem geeigneten Integral über den Bereich $R \leq r \leq L$.

(a) Déterminer l'énergie de rotation contenue dans ce système à l'aide d'une intégrale.

(b) Une force $F(R)$ agit sur une section à la distance R de l'axe des z en raison de la masse tournante plus loin. Déterminer $F(R)$ par une intégrale adéquate de R à L.

Aufgabe / problème 5:

Une masse m bouge de la façon donnée par la description suivante

(a) point initial $(x_0\,,\,y_0) = (-2\,,\,2)$ avec vitesse 0

(b) en suivant un cercle de rayon 2 et de centre $(0,2)$ pour arriver à un angle de 45° par rapport à l'axe des y. Ignorer la friction.

(c) chute libre

La seule force externe est la gravitation dans la direction des y négatif avec $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Eine Masse m bewegt sich gemäss der folgenden Beschreibung

(a) Startpunkt bei $(x_0\,,\,y_0) = (-2\,,\,2)$ mit Geschwindigkeit 0

(b) entlang einem Kreis mit Radius 2 und Zentrum bei $(0,2)$ bis zu einem Winkel von 45° zur y–Achse. Reibung kann vernachlässigt werden.

(c) freier Fall

Die einzige externe Kraft ist die Gravitation in die negative y–Richtung mit $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(a) Déterminer la vitesse v_1 et le vecteur de vitesse au moment où la masse quitte le cercle. (Tip: énergie $\frac{m}{2}\,v^2 = m\,g\,h$)

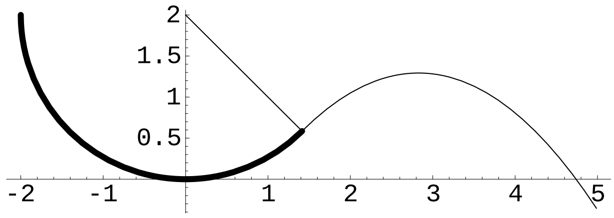
(b) Trouver une paramétrisation de la courbe dans la phase 'chute libre'.

(c) Quand, où et avec quel angle (par rapport à l'horizontale) la masse va–t–elle toucher le fond ($y = 0$)?

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_1 und den Geschwindigkeitsvektor beim Verlassen der Kreisbahn. (Tip: Energie $\frac{m}{2}\,v^2 = m\,g\,h$)

(b) Finden Sie eine Parametrisierung der Flugkurve in der Phase 'freier Fall' .

(c) Wann, wo und mit welchem Winkel tritt die Masse auf dem Boden ($y = 0$) auf?



Aufgabe / problème 6:

On considère l'intégrale $\int_0^1 \sin(3\,x)\;dx$. Diviser l'intervalle en 4 morceau de même longueur.

(a) Calculer la somme supérieure $\overline{S}(P)$ et inférieure $\underline{S}(P)$ pour cette partition.

(b) Trouver une valeur approximative de l'intégral à l'aide de la règle des trapèzes.

Betrachten Sie das Integral $\int_0^1 \sin(3\,x)\;dx$. Unterteilen Sie das Intervall in 4 Stücke gleicher Länge.

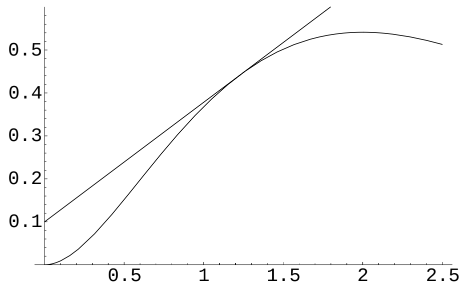
(a) Bestimmen Sie die Ober– und Untersummen $\overline{S}_f(P)$ und $\underline{S}_f(P)$.

(b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals approximativ mit Hilfe der Trapezregel.

Aufgabe / problème 7:

Rechts finden Sie den Graphen der Funktion $f(x) = x^2\,e^{-x}$ und eine Tangente. Zu untersuchen ist der Kontaktpunkt $(z\,,\,f(z))$ der beiden Kurven.

Vous trouvez à droite le graphe de la fonction $f(x) = x^2\,e^{-x}$ et une tangente. Examiner le point de contact $(z\,,\,f(z))$ des deux courbes.



(a) Die Tangente schneidet die y–Achse auf der Höhe $y = 0.1$. Finden Sie eine **Gleichung** für den Wert von z, d.h. den x–Wert des Kontaktpunktes. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

(b) Verwenden Sie den Startwert $z_0 = 1$ und führen Sie einen Schritt des Newton–Verfahrens aus um den numerischen Wert von z zu bestimmen.

(a) La tangente coupe l'axe des y à une hauteur de $y = 0.1$. Trouver **l'équation** pour la valeur z, c'est–à–dire la composante x du point de contact. Simplifier autant que possible.

(b) Utiliser la valeur initiale $z_0 = 1$ et appliquer un pas de la méthode de Newton pour trouver une approximation de la valeur numérique de z .
