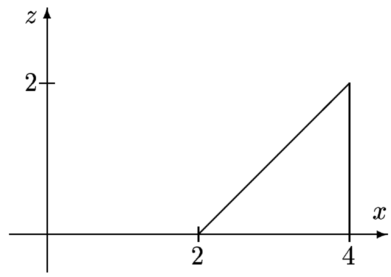
F1 Analyse/Analysis **Prüfung/Épreuve 4**

Dr. A. Stahel 15.7.2003

Aufgabe / Problème 1:

Das rechtsstehende Dreieck wird um die z–Achse rotiert. Dadurch entsteht ein Körper in $\mathbb{R}^3$. Die für die Lösung der Aufgabe notwendigen Integrale sind anzugeben und auszurechnen.

On applique une rotation par rapport à l'axe des z au triangle à droite. Donc un solide en $\mathbb{R}^3$ est généré. Rendre les intégrales nécessaire pour répondre aux questions ci–dessous et calculer les valeurs.



(a) Berechnen Sie das Volumen V.

(b) Das Material hat eine Dichte ρ und der Körper rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z–Achse. Berechnen Sie die Rotationsenergie E.

(a) Calculer le volume V.

(b) Le matériel a une densité ρ et la vitesse angulaire de la rotation par rapport à l'axe des z est donnée par ω. Calculer l'énergie de rotation E.

Aufgabe / Problème 2:

Soit $a > 0$ un nombre fix. Examiner la courbe $y = \frac{1}{2} + x^2$ pour $0 \leq x \leq a$.

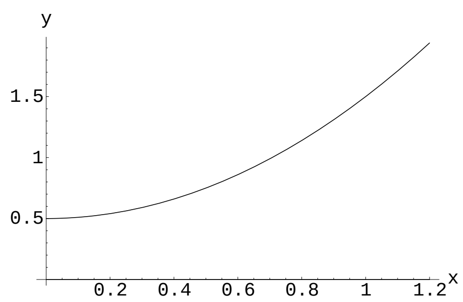
(a) Déterminer l'intégral pour la longueur $L(a)$ de cette courbe. Pas besoin de calculer la valeur de l'intégral.

(b) On applique une rotation par rapport à l'axe des y à la courbe originale. Déterminer la surface de révolution d'une façon exacte.

Sei $a > 0$ eine gegebene Zahl. Untersuchen Sie die Kurve $y = \frac{1}{2} + x^2$ für $0 \leq x \leq a$.

(a) Finden Sie das Integral um die Länge $L(a)$ dieser Kurve zu bestimmen. Das Integral muss nicht berechnet werden.

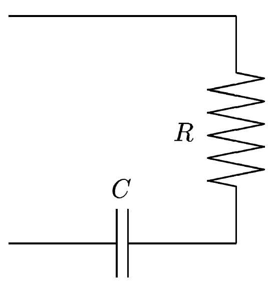
(b) Die ursprüngliche Kurve wird um die y–Achse rotiert. Die Fläche der erzeugten Rotationsfläche ist exakt zu berechnen.



Aufgabe / Problème 3:

Pour le circuit á droite on connaît R, C et U_0

Für den Schaltkreis rechts kennt man R, C und U_0



$$
\begin{aligned}
U(t) &= \text{tension par la résistance / Spannung über dem Widerstand} \\
I(t) &= \text{courant par la résistance / Strom durch Widerstand} \\
P(t) &= I(t) \cdot U(t) = \text{puissance / Leistung} \\
U(t) &= U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned}
$$

La capacitance est déchargé pour des temps $0 \leq t < \infty$ par la résistance. La tension est donnée par la formule ci–dessus.

(a) Utiliser la puissance $P(t)$ pour rendre un intégral qui calcule l'énergie totale $E(T)$ rendue par la résistance pour des temps $0 \leq t \leq T$.

(b) Examiner la valeur de la limite E_∞ de cette intégral $E(T)$ si T tend vérs infini.

(c) Trouver une interprétation électrotechnique de cette limite.

Die Kapazität wird entladen für Zeiten $0 \leq t < \infty$. Die Spannung ist durch die obige Formel gegeben.

(a) Verwenden Sie die Leistung $P(t)$ um ein Integral aufzustellen, welches die gesamte vom Widerstand abgegebene Energie $E(T)$ für Zeiten $0 \leq t \leq T$ berechnet.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert E_∞ von $E(T)$ falls T gegen unendlich strebt.

(c) Gegen Sie eine elektrotechnische Interpretation dieses Grenzwertes.

Aufgabe / Problème 4:

Un ballon bouge pour $0 \leq t \leq t_0$ avec la paramétrisation ci–dessous.

Ein Ball wird entlang einer Bahn beschleunigt für $0 \leq t \leq t_0$ gemäss der Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \\ z\,(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\,t}\ \sin(t) \\ e^{2\,t}\ \cos(t) \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{pour/für} \quad 0 \leq t \leq t_0$$

Le ballon coup le plan des xz et à partir de ce temps t_0 il n'y a que la force de gravitation dans la direction $-z$ avec $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

(a) Calculer location $\vec{x}\,(t_0)$ et vitesse $\vec{v}\,(t_0)$ du ballon pour $t = t_0$.

(b) Trouver location et temps d'intersection de ce ballon avec le plan xy.
Tip: parabole du chute libre.

Der Ball schneidet die xz–Ebene und ab diesm Zeitpunkt t_0 wirkt nur noch die Gravitationskraft in die negative z–Richtung ($g = 10\ \frac{m}{s^2}$).

(a) Bestimmen Sie Ort $\vec{x}\,(t_0)$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}\,(t_0)$ zur Zeit $t = t_0$.

(b) Wo und wann trifft der Ball auf die xy–Ebene auf?
Tip: Wurfparabel
