# F1 Analysis / analyse
# Vordiplom / examen propédeutique

Dr. Andreas Stahel
HTA Biel
10. September 2002, 8:00 – 11:00

**Aufgabe / problème 1:**

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

Calculer les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{d\,x}\,\cosh(e^{(x^2)}) \\ b &= \int_{-2}^{2} x\,\cos(x^3)\,dx \\ c &= \frac{d^{999}}{dx^{999}}\,\sin(2\,x) \end{aligned}$$

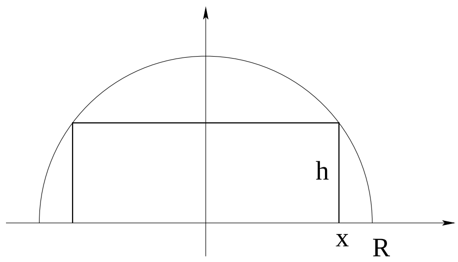
$$\begin{aligned} d &= f'''(0) \quad \text{wobei/avec} \quad f(x) = \tan(x^2) \\ e &= \frac{d^2}{ds^2}\left(\int_{-17}^{s} e^{-x^2}\,dx\right) \end{aligned}$$

---

**Aufgabe / problème 2:**

Pour la figure à droite on applique une rotation par rapport à l'axe verticale. On obtient une demie boule avec un cylindre à l'intérieur. Le rayon $R$ est donné. Rendre des résultats **exacte**.

Die rechtsstehende Figur wird um die vertikale Achse rotiert, sodass eine Halbkugel mit eingeschriebenem Rotationszylinder entsteht. Der Radius $R$ ist gegeben. Die Rechnungen müssen **exakt** sein.




(a) Pour quelle valeur de $x$ le volume du cylindre est–il maximal?

(b) Calculer le rapport du volume maximal du cylindre et la demie boule.

(a) Wie muss $x$ gewählt werden, damit das Volumen $V$ des Zylinders maximal wird.

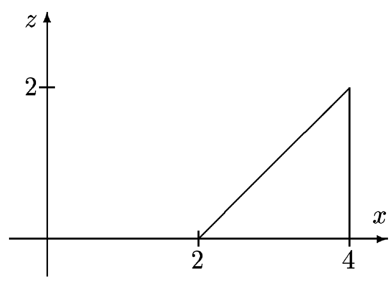
(b) Bestimmen Sie das Verhältnis von maximalem Zylindervolumen zu Volumen der Halbkugel.

---

**Aufgabe / problème 3:**

Das rechtsstehende Dreieck wird um die $z$–Achse rotiert. Dadurch entsteht ein Körper in $\mathbb{R}^3$. Die für die Lösung der Aufgabe notwendigen Integrale sind anzugeben und auszurechnen.

On applique une rotation par rapport à l'axe des $z$ au triangle à droite. Donc un solide en $\mathbb{R}^3$ est généré. Rendre les intégrales nécessaire pour répondre aux questions ci–dessous et calculer les valeurs.




(a) Berechnen Sie das Volumen $V$.

(b) Das Material hat eine Dichte $\rho$ und der Körper rotiert mit Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um die $z$–Achse. Berechnen Sie die Rotationsenergie $E$.

(a) Calculer le volume $V$.

(b) Le matériel a une densité $\rho$ et la vitesse angulaire de la rotation par rapport à l'axe des $z$ est donnée par $\omega$. Calculer l'énergie de rotation $E$.

---

**Aufgabe / problème 4:**

Ein Rohr der Länge $L$, Innenradius $R_1$ und Aussenradius $R_2$ wird durch ein Moment $M$ um den Winkel $\alpha$ verdreht. Untersuchen Sie den Winkel $\alpha$ als Funktion des Innenradius $R_1$.

On applique un moment $M$ à une tube de longueur $L$, rayon intérieur $R_1$ et rayon extérieur $R_2$. Elle est déformé par un angle $\alpha$ . Examiner $\alpha$ comme fonction du rayon intérieure $R_1$ .

$$\alpha = \frac{2\,(1+\nu)\,L}{E\,J}\,M \quad \text{wobei/avec} \quad J = \frac{\pi}{2}\,\left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

(a) Für eine kleine Änderung $\Delta R_1 \ll R_1$ ist die resultierende Winkeländerung $\Delta\alpha$ mit Hilfe einer linearen Approximation zu bestimmen.

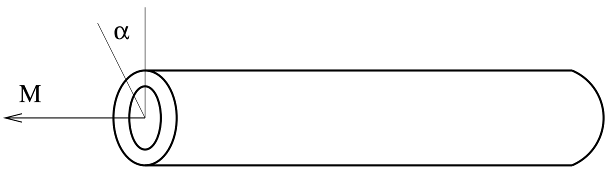
(b) Drücken Sie die relative Änderung $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ als Funktion von $R_1$, $R_2$ und $\frac{\Delta R_1}{R_1}$.

(c) Verwenden Sie die untenstehenden Werte für ein Aluminium–Rohr. Bestimmen Sie $\alpha$ im Bogenmass und im Gradmass. Um wieviel darf der Radius $R_1$ variieren, damit $|\Delta\alpha| \leq 1°$?

(a) Pour un petit changement $\Delta R_1 \ll R_1$ trouver le changement $\Delta\alpha$ de l'angle à l'aide d'une approximation linéaire.

(b) Exprimer le changement relative $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ comme fonction de $R_1$, $R_2$ et $\frac{\Delta R_1}{R_1}$.

(c) Utiliser les valeurs ci–dessous pour une tube en aluminium. Calculer $\alpha$ en radian et degrée. Quel est le changement permissible en $R_1$ tel que $|\Delta\alpha| \leq 1°$?




| Symbol symbole | Wert valeur | Einheit unité |
|---|---|---|
| $M$ | 1 | N m |
| $L$ | 1 | m |
| $R_1$ | 3 | mm |
| $R_2$ | 5 | mm |
| $E$ | $7 \cdot 10^{10}$ | $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ |
| $\nu$ | 0.34 | |

---

**Aufgabe / problème 5:**

Für einen gegebenen Wert von $y \geq 1$ ist die Gleichung $y - \cosh(x) = 0$ nach $x$ aufzulösen mit Hilfe des Verfahrens von Newton.

(a) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift, d.h. die Formel für $x_{n+1}$ als Funktion von $x_n$ .

(b) Für grosse, positive Werte von $x$ kann die Funktion $\cosh x$ durch **eine** einfache Exponentialfunktion sehr gut approximiert werden. Verwenden Sie diese Approximation um für $y \gg 1$ einen guten Startwert $x_0$ für das Verfahren von Newton zu finden.

(c) Führen Sie einen Schritt des obigen Verfahrens aus um $\cosh x = 4$ nach $x$ aufzulösen.

Pour une valeur donnée de $y \geq 1$ resoudre l'équation $y - \cosh(x) = 0$ pour $x$ à l'aide de la méthode de Newton.

(a) Trouver la formule d'itération de Newton, veut dire exprimer $x_{n+1}$ comme fonction de $x_n$ .

(b) Pour des valeurs grandes et positive de $x$ il y a une bonne approximation à $\cosh x$ par **une** fonction exponentielle. Utiliser cette approximation pour trouver une bonne valeur initialle $x_0$ de la méthode de Newton si $y \gg 1$ .

(c) Appliquer un pas de la méthode ci–dessus pour resoudre $\cosh x = 4$ pour $x$ .

---

**Aufgabe / problème 6:**

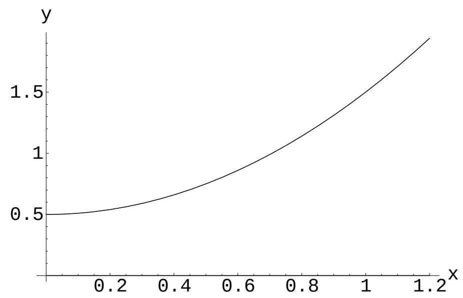
Soit $a > 0$ un nombre fix. Examiner la courbe $y = \frac{1}{2} + x^2$ pour $0 \leq x \leq a$.

(a) Déterminer l'intégral pour la longueur $L(a)$ de cette courbe. Pas besoin de calculer la valeur de l'intégral.

(b) Trouver une approximation de l'intégral ci–dessus à l'aide de la règle de Simpson et les points de support $0$, $\frac{a}{2}$ et $a$ .

(c) Trouver la valeur approximative pour $a = 1$ à l'aide du résultat précédent.

(d) On applique une rotation par rapport à l'axe des $y$ à la courbe originale. Déterminer la surface de révolution d'une façon exacte.




Sei $a > 0$ eine gegebene Zahl. Untersuchen Sie die Kurve $y = \frac{1}{2} + x^2$ für $0 \leq x \leq a$.

(a) Finden Sie das Integral um die Länge $L(a)$ dieser Kurve zu bestimmen. Das Integral muss nicht berechnet werden.

(b) Finden Sie eine Approximation des obigen Integrals mit Hilfe der Simpson–Regel und den drei Stützpunkten $0$, $\frac{a}{2}$ und $a$ .

(c) Bestimmen Sie den approximativen Wert für $a = 1$ mit Hilfe ihres Resultates der obigen Teilaufgabe.

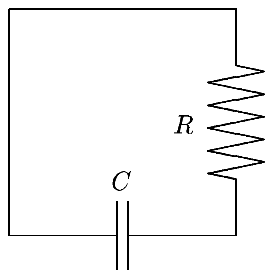
(d) Die ursprüngliche Kurve wird um die $y$–Achse rotiert. Die Fläche der erzeugten Rotationsfläche is exakt zu berechnen.

---

**Aufgabe / problème 7:**

Pour le circuit á droite on connaît $R$, $C$ et $U_0$
Für den Schaltkreis rechts kennt man $R$, $C$ und $U_0$

$$\begin{aligned}
U(t) &= \text{tension de la capacitance / Spannung an der Kapazität} \\
I(t) &= \text{courant par la résistance / Strom durch Widerstand} \\
P(t) &= I(t) \cdot U(t) = \text{puissance / Leistung} \\
U(t) &= U_0 \cdot \exp(-\frac{t}{RC}) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned}$$




La capacitance est déchargé pour des temps $0 \leq t < \infty$ par la résistance. La tension est donnée par la formule ci–dessus.

(a) Utiliser la puissance $P(t)$ pour rendre un intégral qui calcule l'énergie totale $E_0$ dans la capacitance au moment $t = 0$ .

(b) Calculer $E_0$. Montrer les pas intermédiaires.

Die Kapazität wird entladen für Zeiten $0 \leq t < \infty$. Die Spannung ist durch die obige Formel gegeben.

(a) Verwenden Sie die Leistung $P(t)$ um ein Integral aufzustellen, welches die gesamte in der Kapazität gespeicherte Energie $E_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ berechnet.

(b) Berechnen Sie $E_0$. Die Zwischenschritte sind zu zeigen.

---