F1 Analyse/Analysis **Prüfung/Épreuve 2**

Dr. A. Stahel 20.2.2001

Aufgabe / Problème 1:

Untersuchen Sie ob die folgenden Reihen konvergieren.

Pour chaque série ci–dessous décider si elle converge ou pas.

$$\begin{aligned} a &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,\pi)}{n+1} & \quad d &= \sum_{n=3}^{\infty} 3^{-n} \\ b &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4711}{n+1} & \quad e &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \\ c &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4711}{n^2+1} \end{aligned}$$

Lösung/Solution:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,\pi)}{n+1} && \text{konvergiert (Leibniz), da} \quad a_n = \tfrac{(-1)^n}{n+1} \\ b &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4711}{n+1} && \text{divergiert, da vergleichbar zu} \quad a_n \approx \tfrac{1}{n+1} \\ c &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4711}{n^2+1} && \text{konvergiert, da vergleichbar zu} \quad a_n \approx \tfrac{1}{n^2} \\ d &= \sum_{n=3}^{\infty} 3^{-n} && \text{konvergiert, da geometrische Reihe mit Faktor } q = \tfrac{1}{3} < 1 \\ e &= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n^2}{2^n} && \text{konvergiert, Wurzelkriterium} \quad \sqrt[n]{a_n} = \tfrac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \to \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe / Problème 2:

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke. Die Rechnungen sind zu zeigen.

Calculer les expressions suivantes. Montrer les calculations.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3\,n}{3\,n^2+n+27} & \quad d &= \lim_{h\to -1} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} \\ b &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-\cos(n)}{n^3+\cosh n} & \quad e &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^n}{2^{2n}} \\ c &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} \end{aligned}$$

Lösung/Solution:

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3\,n}{3\,n^2+n+27} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3\,\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}+\frac{27}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-\cos(n)}{n^3+\cosh n} = 0 \quad \text{da} \quad \cosh n \approx \frac{1}{2}\,e^n$$

$$c = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} = 3 \lim_{h\to 0} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{3\,h} = -3\,\sin 1$$

Ableitung von $\cos x$ verwenden

$$d = \lim_{h\to -1} \frac{\cos(1+3\,h)-\cos 1}{h} = \frac{\cos(-2)-\cos 1}{-1} = \cos(1)-\cos(-2)$$

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\pi}{4}\right)^n = \frac{-\pi}{4}\,\frac{1}{1-\frac{-\pi}{4}} = \frac{-\pi}{4+\pi}$$

geometrische Reihe

Aufgabe / Problème 3:

Calculer les expressions suivantes

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
a &= \tfrac{d}{dx}\,\tfrac{\cos x}{\sin x} & d &= \tfrac{d}{dy}\,x^y \\
b &= \tfrac{d}{dx}\,\sin(x^2)\cdot e^{-3x} & e &= \tfrac{d}{da}\,\log_a x \\
c &= \tfrac{d}{dx}\,x^y
\end{aligned}
$$

Lösung/Solution:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\,\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} \\
b &= \frac{d}{dx}\,\sin(x^2)\cdot e^{-3x} = 2\,x\,\cos(x^2)\cdot e^{-3x} - \sin(x^2)\cdot 3\,e^{-3x} \\
c &= \frac{d}{dx}\,x^y = \frac{d}{dx}\,e^{y\,\ln x} = e^{y\,\ln x}\,\frac{y}{x} = y\,x^{y-1} \\
d &= \frac{d}{dy}\,x^y = \frac{d}{dy}\,e^{y\,\ln x} = e^{y\,\ln x}\,\ln x = x^y\,\ln x \\
e &= \frac{d}{da}\,\log_a x = \frac{d}{da}\,\frac{\ln x}{\ln a} = -\frac{\ln x}{(\ln a)^2}\,\frac{1}{a} = \frac{-\ln x}{a\,(\ln a)^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe / Problème 4:

(a) Betrachte die Funktion $f(x) = 1/x$ und benutze die Definition durch Grenzwerte, um die Ableitung $f'(x)$ zu bestimmen.

(b) Verwenden Sie das obige Resultat und die Produktregel um die Ableitung von $g(x) = \frac{1}{x^2}$ zu bestimmen.

(a) Considérer la fonction $f(x) = 1/x$ et utiliser la définition par les limites pour déterminer la dérivée $f'(x)$.

(b) Utiliser le résultat ci–dessus et la règle du produit pour déterminer la dérivée de $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Lösung/Solution:

(a)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{(x+h)\,x\,h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)\,x} = \frac{-1}{x^2}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{-1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^3}
$$

Aufgabe / Problème 5:

Utiliser une approximation de Taylor de l'ordre 1 pour résoudre le problème.

(a) Trouver une bonne approximation pour $\tan 28°$ avec des calculations simples. Indication: $28 = 30 - 2$

(b) Trouver l'erreur maximale de cette approximation.

Verwenden Sie eine Approximation von Taylor der Ordnung 1 um die Aufgabe zu lösen.

(a) Bestimmen Sie $\tan 28°$ mit einer einfachen Rechnung möglichst genau. Tip: $28 = 30 - 2$

(b) Bestimmen Sie den maximal möglichen Fehler im obigen Problem.

Lösung/Solution: Es ist zu beachten, dass die Rechnungen im Bogenmass durchgeführt werden sollten.

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + R \quad \text{wobei} \quad R = \frac{1}{2} f''(\xi)\cdot h^2 \\ f(x) &= \tan x \\ f'(x) &= 1 + \tan^2 x \\ f''(x) &= 2\tan x\,(1+\tan^2 x) \end{aligned}$$

(a) $x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$, $h = -2° = \frac{-\pi}{90}$, $f(x_0) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x_0) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$$\tan(28°) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\,\frac{-\pi}{90} \qquad (\approx 0.530808)$$

(b) Da $28° < \xi < 30°$ gilt $f''(\xi) \leq f''(30°) = \frac{8}{3\sqrt{3}} < 2$ und somit

$$|\,R\,| = \frac{1}{2}\,|\,f''(\xi)\,|\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \leq \left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 0.0012$$
