F2 Mathematik 2 / mathématique 2
Fourier

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
5.7.2012, 08.15 – 11.15

Aufgabe / problème 1:

Untersuchen Sie die zwei Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0.57836 \\ 0.78582 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0.84490 \\ 0.29038 \\ z \end{pmatrix}$$

und den Vektor $\vec{a} = (1\,,\,2\,,\,-1)^T$.

(a) Bestimmen Sie $x > 0$ und z, sodass die beiden Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ orthonormal sind.

(b) Finde den optimalen Wert des Parameters λ_1, sodass der Abstand von $\vec{a}$ zu $\lambda_1\,\vec{b}_1$ minimal wird. Bestimme den Abstand.

(c) Finde die optimalen Werte der Parameter μ_1 und μ_2, sodass der Abstand von $\vec{a}$ zu $\mu_1\,\vec{b}_1 + \mu_2\,\vec{b}_2$ minimal wird. Bestimme den Abstand.

Examiner les deux vecteurs ... et le vecteur $\vec{a} = (1\,,\,2\,,\,-1)^T$.

(a) Trouver les valeurs de $x > 0$ et z, tel que les deux vecteurs $\vec{b}_1$ et $\vec{b}_2$ sont orthonormales.

(b) Trouver la valeur optimale du paramètre λ_1, telles que la distance entre $\vec{a}$ et $\lambda_1\,\vec{b}_1$ soit minimale. Calculer la distance.

(c) Trouver les valeurs optimales des paramètres μ_1 et μ_2, tels que la distance entre $\vec{a}$ et $\mu_1\,\vec{b}_1 + \mu_2\,\vec{b}_2$ soit minimale. Calculer la distance.

Aufgabe / problème 2:

Ordnen Sie jeder der fünf untenstehenden Funktionen die zugehörige Fourier Reihe zu. Schreiben Sie Ihr Resultat in die Tabelle.

Pour les cinq fonctions ci–dessous trouver la série de Fourier. Mettre votre réponse dans le tableau.

Funktion / fonction			Reihe / série
F1	Fourier Reihe von	$f(x) = x$ auf $[-\pi\,,\,+\pi]$	
F2	Fourier Reihe von	$f(x) = \operatorname{sign}(x)$ auf $[-\pi\,,\,+\pi]$	
F3	Fourier Sinus Reihe von	$f(x) = 1$ auf $[0\,,\,1]$	
F4	Fourier Reihe von	$f(x) = x^2$ auf $[-\pi\,,\,+\pi]$	
F5	Fourier Reihe von	$f(x) = 1 - 2\,\lvert x\rvert$ auf $[-1\,,\,+1]$	

Hier sind die Fourier Reihen:

Voila les séries de Fourier:

$$\text{S1:}\quad f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4\,\cos(n\,x)}{n^2}$$

$$\text{S2:}\quad f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2\,n+1)\,\pi\,x)}{2\,n+1}$$

$$\text{S3:}\quad f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2\,n+1)\,x)}{2\,n+1}$$

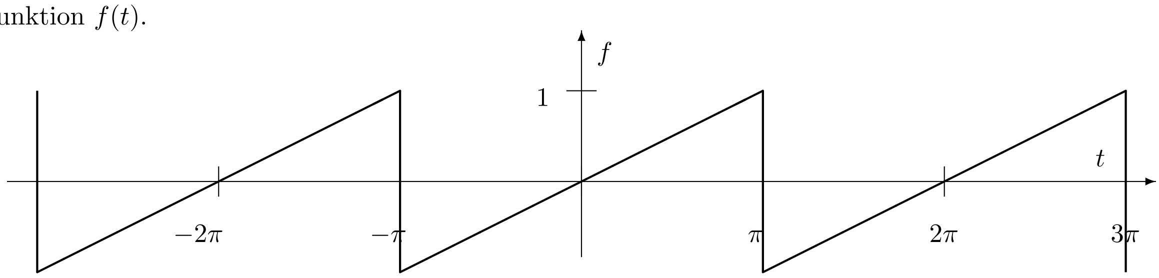
$$\text{S4:}\quad f(x) \sim \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2\,n+1)\,\pi\,x)}{(2\,n+1)^2}$$

$$\text{S5:}\quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n}\,\sin(n\,x)$$

Aufgabe / problème 3:

Untersuchen Sie die untensthende, 2π–periodische Funktion $f(t)$.

Examiner la fonction ci-dessous avec période 2π.



(a) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion $f(t)$.

(b) Skizzieren Sie den ersten Beitrag der Fourierreihe in der obigen Graphik.

(c) Finden Sie die komplexe Fourierreihe einer Lösung der untenstehende Differentialgleichung (I). Verwenden Sie (II).

(a) Trouver la série de Fourier réelle de cette fonction.

(b) Esquisser le graphe du premier contribution de la série de Fourier dans la graphique ci–dessus.

(c) Trouver la série de Fourier complexe d'une solution de l'équation différentielle (I) ci–dessous. Utiliser (II).

$$\begin{aligned} \text{(I)}: \quad & \ddot y(t) + 2\,\dot y(t) + 49\,y(t) &=& \; f(t) \\ \text{(II)}: \quad & \ddot y(t) + 2\,\dot y(t) + 49\,y(t) &=& \; e^{i\,n\,t} \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = \frac{1}{49 - n^2 + i\,2\,n}\,e^{i\,n\,t} \end{aligned}$$

Aufgabe / problème 4:

Die Funktion

La fonction

$$u_\lambda\,(t,x) = e^{-\lambda^2\,t}\,\sin(\lambda\,x)$$

löst die Wärmeleitungsgleichung (eine partielle Differentialgleichung)

est la solution de l'équation de conduction de chaleur ci–dessous.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\,u\,(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u\,(t,x) && \text{für/pour} \quad t>0 \quad \text{und/et} \quad x>0 \\ u\,(t,0) &= 0 && \text{für/pour} \quad t \geq 0 \\ u\,(0,x) &= \sin(\lambda\,x) && \text{für/pour} \quad x>0 \end{aligned}$$

Zu finden ist die Lösung der selben Differentialgleichung, aber mit der neuen Anfangsbedingung

Trouver la solution de cette équation différentielle avec la condition initiale

$$u(0,x) = f\,(x) = \begin{cases} 10 & \text{für/pour} \quad 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{für/pour} \quad x < 2 \quad \text{und/et} \quad x > 5 \end{cases}$$

statt der Funktion $\sin(\lambda\,x)$.

au lieu de la fonction $\sin(\lambda\,x)$.

(a) Finden Sie die Fourier–Sin–Transformation F_S der Funktion $f(x)$.

(b) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ als Integral von sin–Funktionen.

(c) Finden Sie eine Integraldarstellung der Lösung $u(t,x)$. Die Überlegungen sind anzugeben.

(d) Bestimmen Sie den numerischen Wert der Lösung zur Zeit $t = 0.5$ bei $x = 4$. (1 Punkt)

(a) Trouver la transformation de Fourier Sinus F_S de la fonction $f(x)$.

(b) Donner la fonction $f(x)$ comme intégrale des fonctions sin.

(c) Trouver une intégrale pour la solution $u(t,x)$. Expliquer la méthode.

(d) Déterminer la valeur numérique de la solution $u(t,x)$ pour $t = 0.5$ et $x = 4$. (1 point)
