F2 Mathematik 2 / mathématique 2
Fourier

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
2.7.2012, 08.15 – 11.15

Aufgabe / problème 1:

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Bestimmen Sie die Fourier Sinus-Reihe. Die Rechnungen sind zu zeigen.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der obigen Approximation durch 2 Terme (von Null verschieden) auf dem Intervall $-2 \leq x \leq 6$.

(c) Skizzieren Sie den Graphen der obigen Approximation durch 20 Terme auf dem Intervall $-2 \leq x \leq 6$.

Examiner la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Donner la série de Fourier Sinus. Montrer les calculs.

(b) Esquisser le graphe de l'approximation der Fourier Sinus avec 2 termes (différentes de zéro) sur l'intervalle $-2 \leq x \leq 6$.

(c) Esquisser le graphe de l'approximation der Fourier Sinus avec 20 termes sur l'intervalle $-2 \leq x \leq 6$.

Aufgabe / problème 2:

Ein Signal wurde während $T = 10$ Sekunden an $N = 2^{12} = 4096$ Punkten regelmässig gemessen. Auf die Werte wurde der Befehl `fft()` angewandt und der Betrag der ersten 100 Koeffizienten ($|c_n|$ für $0 \leq n \leq 99$) ist unten gezeigt. Das Signal enthält zwei dominierende Beiträge mit festen Frequenzen.

(a) Bestimmen Sie die beiden Frequenzen möglichst genau.

(b) Welche maximale Frequenz kann mit der obigen Konfiguration untersucht werden?

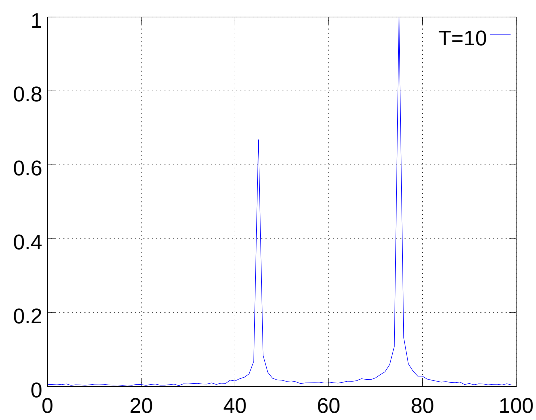
(c) Das selbe Signal wird noch einmal gemessen, mit $T = 5$ und $n = 2^{14} = 16384$. Skizzieren Sie in der untenstehenden Graphik das zu erwartende Spektrum. Welche maximale Frequenz können mit dieser Konfiguration erfasst werden?

On mesure un signal pendant $T = 10$ secondes avec $N = 2^{12} = 4096$ points. Avec ces valeurs on appelle la commande `fft()` et puis on affiche les valeurs absolues des premiers 100 coefficients ($|c_n|$ pour $0 \leq n \leq 99$). On arriveau graphique ci–dessous. Le signal est composé de deux contributions avec des fréquences fixes.

(a) Déterminer les deux fréquences le plus précis possible.

(b) Quelle fréquence maximale peut–on examiner avec la configuration ci–dessus?

(c) Réexaminer le signal identique avec $T = 5$ et $n = 2^{14} = 16384$ points. Esquisser le spectre dans le graphique ci–dessous. Quelle fréquence maximale peut–on examiner avec cette nouvelle configuration?



Aufgabe / problème 3:

Untersuchen Sie 2π–periodische Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung für verschiedene Funktionen $f(t)$.

Examiner des solution de période $2\,\pi$ de l'équation différentielle pour des fonctions $f(t)$ différentes.

$$\ddot y(t) + 2\,\dot y(t) + 49\,y(t) = f(t)$$

(a) Für $f(t) = e^{i\,n\,t}$ so gibt es eine 2π–periodische Lösung der Form $y_n(t) = K_n\,e^{i\,n\,t}$. Bestimmen Sie $K_n \in \mathbb{C}$.

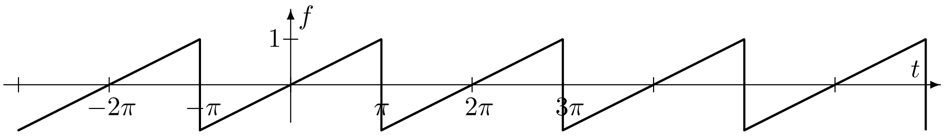
(b) Stellen Sie $y(t)$ als geeignete Reihe dar, falls die 2π–periodische Funktion $f(t)$ durch den untenstehenden Graphen gegeben ist.

(c) Die obige Lösung $y(t)$ enthält auch einen Anteil der Form $A\,\cos(7\,t + \phi)$. Bestimmen Sie die Amplitude A.

(a) Pour $f(t) = e^{i\,n\,t}$ il existe une solution de période 2π de la forme $y_n(t) = K_n\,e^{i\,n\,t}$. Trouver $K_n \in \mathbb{C}$.

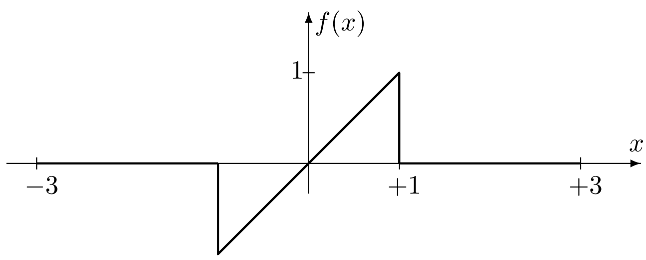
(b) Écrire $y(t)$ comme série adaptée si la fonction périodique f est donnée par le graphe ci–dessous.

(c) La solution $y(t)$ ci–dessus contient une contribution de la forme $A\,\cos(7\,t + \phi)$. Trouver l'amplitude A.



Aufgabe / problème 4:

Die zu untersuchende Funktion ist $f(x) = x$ auf $[-1, 1]$ und Null sonst. Der Graph ist rechts gezeigt.
Examiner la fonction montrée à droite. On a $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et zéro hors de l'intervalle.



(a) Examiner la fonction comme fonction périodique avec période 6 . Trouver la série de Fourier.

(b) Mettez les valeurs de la fonction à zéro pour tout x hors de l'intervalle $[-1, 1]$. Puis on peut écrire la fonction comme intégral dans la forme montrée ci–dessous. Trouver la fonction $b(\nu)$.

(a) Untersuchen Sie die Funktion als periodische Funktion mit Periode 6. Bestimmen Sie die Fourierreihe.

(b) Setzen Sie die Funktionswerte zu Null für alle x ausserhalb von $[-1, 1]$. Dann kann die Funktion als Integral geschrieben werden, in der untenstehenden Form. Bestimmen Sie die Funktion $b(\nu)$.

$$f(x) = \int_0^\infty b(\nu)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,x)\,d\nu$$

Tip: Utiliser

Tipp: Verwende

$$\int x\,\sin(\alpha\,x)\,dx = \frac{\sin(\alpha\,x) - \alpha\,x\,\cos(\alpha\,x)}{\alpha^2} + C$$