

**F2a Mathematik 2 / mathématique 2**  
**Fourier**

Dr. Andreas Stahel  
BFH-TI Biel  
4.7.2011, 08.00 – 10.00

**Aufgabe / problème 1:**

Untersuchen Sie die Funktion  $f(x) = x$  auf dem Intervall  $[0, L]$ .

- (a) Finden Sie die Fourierreihe der Funktion.
- (b) Finden Sie die Fourier-Sinus-Reihe der Funktion.

Die Antwort muss die zu berechnenden Integrale und die resultierende Reihe enthalten.

Examiner la fonction  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[0, L]$ .

- (a) Trouver la série de Fourier pour cette fonction.
- (b) Trouver la série de Fourier Sinus pour cette fonction.

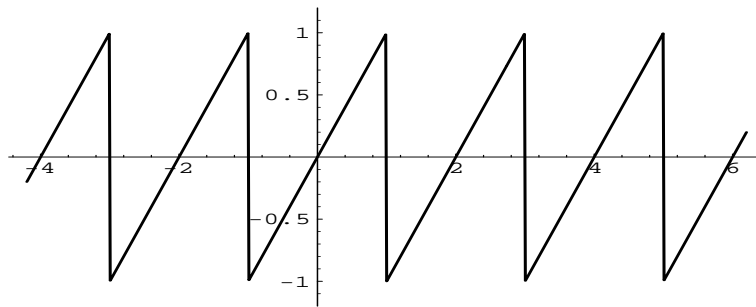
Pour une réponse complète il faut donner les intégrales à calculer et les séries obtenues.

**Aufgabe / problème 2:**

Für eine (idealisierte) Operationsverstärkerschaltung und komplexe Eingangssignale der Form  $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$  gilt die Beziehung

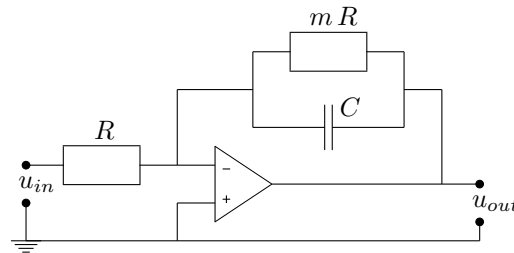
$$\frac{u_{in}}{R} = -u_{out} \left( \frac{1}{mR} + i\omega C \right)$$

Diesem Schaltkreis wird nun ein periodisches Eingangssignal der untenstehenden Form eingegeben.



- (a) Bestimmen Sie die Fourierreihe des Eingangssignals  $u_{in}(t)$ .
- (b) Sei  $m = 5$  und  $RC = 2$ . Das Ausgangssignal  $u_{out}(t)$  beinhaltet auch ein Teilsignal mit Periode  $1/2$ . Bestimmen Sie dessen Amplitude.

Pour un circuit avec OpAmp et des signaux d'entrée complexes  $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$  on sait que



On applique un signal d'entrée periodique, donne dans la figure ci-dessous.

- (a) Trouver la série de Fourier du signal d'entrée  $u_{in}(t)$ .
- (b) Soit  $m = 5$  et  $RC = 2$ . Le signal de sortie  $u_{out}(t)$  possède une composante de période  $1/2$ . Calculer l'amplitude de cette composante.

### Aufgabe / problème 3:

Untersuchen Sie die dynamische Wärmeleitungsgleichung.  $L$  und  $k$  sind Konstanten und die Funktion  $f(x)$  sei gegeben.

Examiner l'équation de chaleur dynamique.  $L$  et  $k$  sont des constantes et la fonction  $f(x)$  est donnée.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, x) &= k^2 \frac{d^2}{dx^2} u(t, x) && \text{für } t > 0 \text{ und/et } 0 < x < L \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 && \text{für/pour } t > 0 \\ u(0, x) &= f(x) && \text{für/pour } 0 < x < L \end{aligned}$$

- (a) Finden Sie die Lösung  $u(t, x)$  für / Trouver la solution  $u(t, x)$  si

$$f(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Tip:  $u(t, x) = e^{-\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  für ein geeignetes  $\lambda_n$ . / pour un  $\lambda_n$  bien choisi.

- (b) Finden Sie die Lösung  $u(t, x)$  für / Trouver la solution  $u(t, x)$  si

$$f(x) = x$$

### Aufgabe / problème 4:

Dans un signal acoustique on veut examiner les fréquences jusqu'à 5'000 Hz. De manière fiable on doit pouvoir différencier les fréquences ayant une différence de 1 Hz.

In einem Tonsignal müssen Frequenzen bis zu 5'000 Hz erfasst werden. Zudem müssen Signale mit Frequenzen, die nur um 1 Hz voneinander abweichen, zuverlässig erfasst werden (d.h. Unterscheidung ist möglich).

- (a) Utiliser des intégrales pour déterminer la transformation de Fourier de la fonction rectangulaire

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq b \\ 0 & \text{si } |t| > b \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Integralen die Fouriertransformation der Rechtecksfunktion

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq b \\ 0 & \text{falls } |t| > b \end{cases}$$

- (b) Il faut satisfaire les conditions décrites ci-dessus. Quelle est la durée minimale de la mesure? Combien de points de mesure doit-on utiliser? Donner le raisonnement de votre réponse.

- (b) Wie lange muss mindestens gemessen werden und wieviele Messpunkte sind zu wählen, damit die in der Aufgabe geforderten Anforderungen erfüllt werden können? Die Antwort ist zu begründen.

- (c) Votre (vieux) PC peut calculer la FFT d'un vecteur avec  $1024 = 2^{10}$  composantes en une seconde. Quel est le temps de calcul pour votre solution du sous-problème ci-dessus?

- (c) Ihr FFT-Programm kann (auf einem alten PC) in 1 Sekunde einen Vektor mit  $2^{10} = 1024$  Komponenten transformieren. Wie lange benötigt die Transformation eines Resultatvektors aus der vorangehenden Teilaufgabe?