F2a Mathematik 2 / mathématique 2
Schlussprüfung / examen final
Fourier

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
10.8.2009, 13:30 – 16:30, 2 Stunden für Fourier

Aufgabe / problème 1:

Unten sehen Sie den Graphen der Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $(-3, 3)$. Die Funktion ist periodisch mit Periode 6.

(a) Geben Sie möglichst einfache Formeln an um die Koeffizienten a_n und b_n der Fourier Reihe dieser Funktion zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie a_4, b_4 und c_4 möglichst effizient.

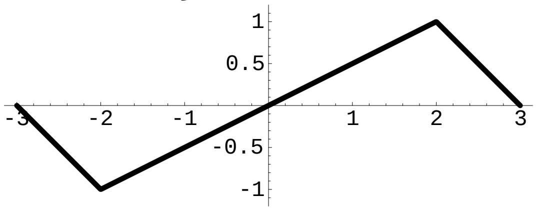
(c) Die neue Funktion $g(t) = \frac{d}{dt}\, f(t)$ ist stückweise stetig mit Periode 6. Bestimmen Sie den komplexen Fourierkoeffizienten $\tilde{c}_4$ der Fourierreihen von $g(t)$ möglichst effizient.

Le graphe de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $(-3, 3)$ est montré ci–dessous. La fonction est périodique de période 6 .

(a) Donner des formules les plus simples possibles pour calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de cette fonction.

(b) Trouver les valeurs de a_4, b_4 et c_4 d'une façon efficace.

(c) La nouvelle fonction $g(t) = \frac{d}{dt}\, f(t)$ est continue par morceau de période 6 . Déterminer le coefficient de Fourier $\tilde{c}_4$ de cette fonction d'une façon efficace.

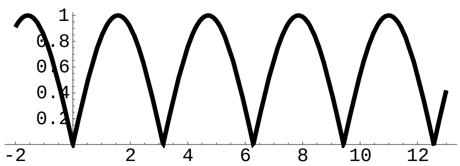


Aufgabe / problème 2:

Die Fourierreihe der Funktion $u_{in}(t) = |\sin t\,|$ ist gegeben durch

La série de Fourier de la fonction $u_{in}(t) = |\sin t\,|$ est donnée par

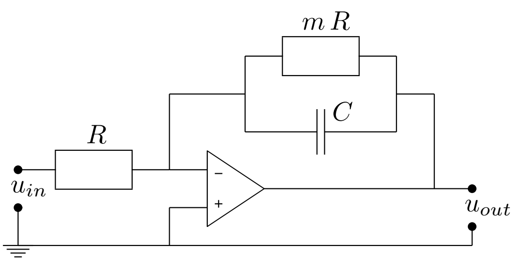
$$
\begin{aligned}
u_{in}(t) &\sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5\cdot 7} + \ldots\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\,i\,k\,t}}{4\,k^2-1}
\end{aligned}
$$



Für eine (idealisierte) Operationsverstärkerschaltung und komplexe Eingangsignale der Form $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$ gilt die Beziehung

Pour un circuit avec OpAmp et des signaux d'entré complexes $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$ on sait que

$$\frac{u_{in}}{R} = -u_{out}\left(\frac{1}{m\,R} + i\,\omega\,C\right)$$



Diesem Schaltkreis wird nun ein periodisches Eingangssignal $u_{in}(t)$ der obigen Form eingegeben.

On applique un signal d'entrée périodique $u_{in}(t)$, donné dans la figure ci-dessus.

(a) Bestimmen Sie den Fourierkoeffizienten c_0 von $u_{in}(t)$ mit Hilfe eines Integrals.

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe des Ausgangssignals $u_{out}(t)$.

(c) Sei $m = 5$ und $RC = 2$. Die Funktion $u_{out}(t)$ beinhaltet auch ein Teilsignal mit Periode $\pi/4$. Schreiben Sie dieses in der Form $A\cos(\omega\, t + \psi)$.

(a) Trouver le coefficient de Fourier c_0 de $u_{in}(t)$ à l'aide d'une intégrale.

(b) Trouver la série de Fourier du signal de sortie $u_{out}(t)$.

(c) Soit $m = 5$ et $RC = 2$. La fonction $u_{out}(t)$ possède une composante de période $\pi/4$. Écrire cette composante dans la forme $A\cos(\omega\, t + \psi)$.

Aufgabe / problème 3:

Ein Signal wurde während $T = 0.25$ Sekunden an $N = 2^{12} = 4096$ Punkten regelmässig gemessen. Auf die Werte wurde der Befehl `fft()` angewandt und der Betrag der ersten 100 Koeffizienten ($|c_n|$ für $0 \leq n \leq 99$) ist unten gezeigt. Das Signal enthält zwei dominierende Beiträge mit festen Frequenzen.

(a) Bestimmen Sie die beiden Frequenzen möglichst genau.

(b) Welche maximale Frequenz kann mit der obigen Konfiguration untersucht werden?

(c) Ersetzen Sie auf der horizontalen Achse die Nummerierung n durch eine Frequenzskala (Einheit Hz).

(d) Das selbe Signal wird noch einmal gemessen, mit $T = 2.5$ und $n = 2^{14} = 16384$. Skizzieren Sie in der untenstehenden Graphik das zu erwartende Spektrum. Verwenden Sie ihre Frequenzskala der vorangehenden Teilaufgabe.

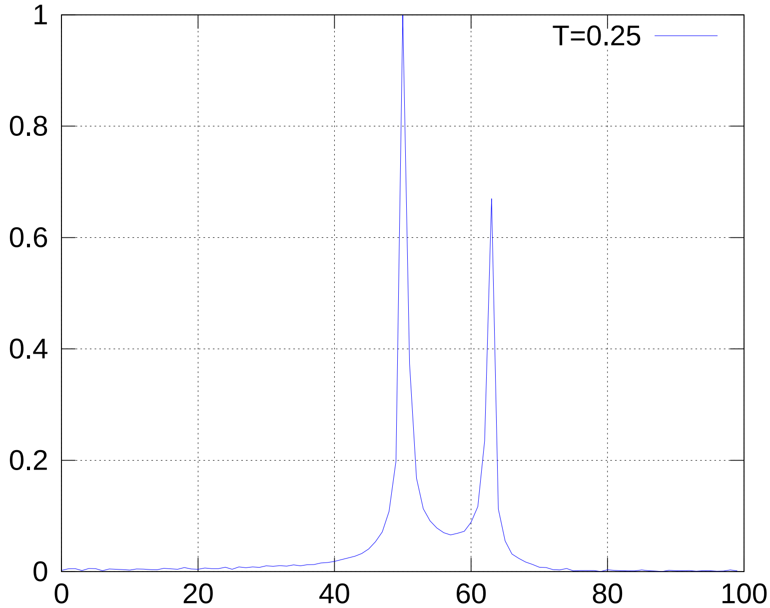
On mesure un signal pendant $T = 0.25$ secondes avec $N = 2^{12} = 4096$ points. Avec ces valeurs on appelle la commande `fft()` et puis on affiche les valeurs absolues des premiers 100 coefficients ($|c_n|$ pour $0 \leq n \leq 99$). On arrive au graphique ci–dessous. Le signal est composé de deux contributions avec des fréquences fixes.

(a) Déterminer les deux fréquences le plus précis possible.

(b) Quelle fréquence maximale peut–on examiner avec la configuration ci–dessus?

(c) Pour l'axe horizontal remplacer la numérotation avec n par une échelle des fréquences (unité Hz).

(d) Réexaminer le signal identique avec $T = 2.5$ et $n = 2^{14} = 16384$ points. Esquisser le spectre dans le graphique ci–dessous. Utiliser l'échelle des fréquences de la question précédente.



Aufgabe / problème 4:

Die Funktion

La fonction

$$u_\lambda(t,x) = e^{-\lambda^2 t}\,\sin(\lambda\,x)$$

löst die Wärmeleitungsgleichung (eine partielle Differentialgleichung)

est la solution de l'équation de conduction de chaleur ci–dessous.

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t}\,u(t,x) & = & \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(t,x) & \text{für/pour} \quad t>0 \quad \text{und/et} \quad x>0 \\ u(t,0) & = & 0 & \text{für/pour} \quad t\geq 0 \\ u(0,x) & = & \sin(\lambda\,x) & \text{für/pour} \quad x>0 \end{array}$$

Zu finden ist die Lösung der selben Differentialgleichung, aber mit der neuen Anfangsbedingung

Trouver la solution de cette équation différentielle avec la condition initiale

$$u(0,x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für/pour} \quad 0\leq x\leq 4 \\ 0 & \text{für/pour} \quad x>4 \end{cases}$$

statt der Funktion $\sin(\lambda\,x)$.

au lieu de la fonction $\sin(\lambda\,x)$.

(a) Finden Sie die Fourier–Sin–Transformation F_S der Funktion $f(x)$.

(b) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ als Integral von sin–Funktionen.

(c) Finden Sie eine Integraldarstellung der Lösung $u(t,x)$. Die Überlegungen sind anzugeben.

(d) Bestimmen Sie den numerischen Wert der Lösung zur Zeit $t=0.5$ bei $x=4$. (1 Punkt)

(a) Trouver la transformation de Fourier Sinus F_S de la fonction $f(x)$.

(b) Donner la fonction $f(x)$ comme intégrale des fonctions sin.

(c) Trouver une intégrale pour la solution $u(t,x)$. Expliquer la méthode.

(d) Déterminer la valeur numérique de la solution $u(t,x)$ pour $t=0.5$ et $x=4$. (1 point)
