F2a Mathematik 2 / mathematique 2
Schlussprüfung / examen final
Fourier

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
27.8.2007, 8:00 – 11:00, 2 Stunden für Fourier

Aufgabe / problème 1:

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Bestimmen Sie die Fourier Sinus-Reihe. Die Rechnungen sind zu zeigen.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der obigen Approximation durch 20 Terme auf dem Intervall $-2 \leq x \leq 6$.

Examiner la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Donner la série de Fourier Sinus. Montrer les calculations.

(b) Esquisser le graphe de l'approximation der Fourier Sinus avec 20 termes sur l'intervalle $-2 \leq x \leq 6$.

Aufgabe / problème 2:

Gegeben sind zwei Funktionen

On a deux fonctions

$$f(x) = \sum_{n=1}^{20} A_n \sin(n\,x) \quad \text{und/et} \quad g(x) = \sum_{m=1}^{20} B_m \sin(m\,x) \quad \text{für/pour} \quad 0 \leq x \leq 2\,\pi$$

durch die Vektoren

données par les vecteurs

$$\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_{20})^{tr} \quad \text{und/et} \quad \vec{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_{20})^{tr}$$

(a) Stellen Sie die Integrale auf um den Korrelationskoeffizienten C dieser beiden Funktionen zu bestimmen.

(b) Finden Sie eine einfache Formel für C als Funktion der beiden Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Hierzu sind die Integrale der ersten Teilaufgabe auszurechnen.

(a) Donner les intégrals pour calculer le coefficient de corrélation C de ces deux fonctions f et g.

(b) Trouver une formule simple pour C comme fonction des deux vécteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Pour y arriver calculer les intégrals en (a).

Aufgabe / problème 3:

Untersuchen Sie 2π–periodische Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung für verschiedene Funktionen $f(t)$.

Examiner des solution avec période $2\,\pi$ de l'équation différentielle pour des fonctions $f(t)$ différentes.

$$\ddot{y}(t) + 2\,\dot{y}(t) + 49\,y(t) = f(t)$$

(a) Falls $f(t) = e^{i\,n\,t}$ so gibt es eine 2π–periodische Lösung der Form $y_n(t) = K_n\,e^{i\,n\,t}$. Bestimmen Sie $K_n \in \mathbb{C}$.

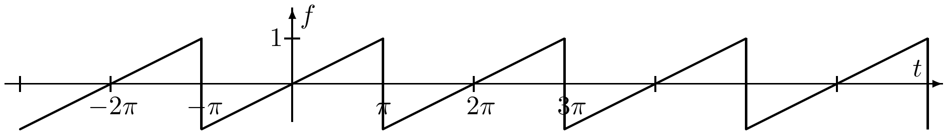
(b) Stellen Sie $y(t)$ als geeignete Reihe dar, falls die 2π–periodische Funktion $f(t)$ durch den untenstehenden Graphen gegeben ist.
Tipp: komplexe Fourierreihe von $f(t)$.

(c) Die obige Lösung $y(t)$ enthält auch einen Anteil der Form $A\,\cos(7\,t + \phi)$. Bestimmen Sie die Amplitude A.

(a) Pour $f(t) = e^{i\,n\,t}$ il existe une solution avec période 2π de la forme $y_n(t) = K_n\,e^{i\,n\,t}$. Trouver $K_n \in \mathbb{C}$.

(b) Écrire $y(t)$ comme série adaptée si la fonction périodique f est donnée par le graphe ci–dessous. Tip: série de Fourier complexe de la fonction $f(t)$.

(c) La solution $y(t)$ ci–dessus contient une contribution de la forme $A\,\cos(7\,t + \phi)$. Trouver l'amplitude A.



Aufgabe / problème 4:

Die Funktion

$$u_\lambda(t,x) = e^{-\lambda^2 t} \cos(\lambda x)$$

löst die Wärmeleitungsgleichung (eine partielle Differentialgleichung)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) && \text{für} \quad t>0 \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= \cos(\lambda x) && \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Zu finden ist die Lösung der selben Differentialgleichung, aber mit der neuen Anfangsbedingung

$$u(0,x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -5 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{für} \quad |x| > 5 \end{cases}$$

statt der Funktion $\cos(\lambda x)$.

(a) Finden Sie die Fourier–Cos–Transformation F_C der Funktion $f(x)$.

(b) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ als Integral von cos–Funktionen.

(c) Finden Sie eine Integraldarstellung der Lösung $u(t,x)$. Die Überlegungen sind anzugeben.

(d) Bestimmen Sie den numerischen Wert der Lösung zur Zeit $t = 0.5$ bei $x = 4$. (1 Punkt)

La fonction

est la solution de l'équation de conduction de chaleur ci–dessous.

Trouver la solution de cette équation différentielle avec la condition initiale

au lieu de la fonction $\cos(\lambda x)$.

(a) Trouver la transformation de Fourier Cosinus F_C de la fonction $f(x)$.

(b) Donner la fonction $f(x)$ comme intégrale des fonctions cos.

(c) Trouver une intégrale pour la solution $u(t,x)$. Expliquer la méthode.

(d) Déterminer la valeur numérique de la solution $u(t,x)$ pour $t = 0.5$ et $x = 4$. (1 point)