F2 a&r Mathematik 1
Schlussprüfung

Dr. Andreas Stahel, BFH-TI Biel
31. Januar 2018, 13.30 – 16:30, Zimmer 509

Aufgabe 1: Für die folgenden Systeme (Input $f(t)$, Output $y(t)$) ist zu entscheiden, ob sie stabil sind. Ein System kann durch eine Differentialgleichung oder eine Transferfunktion $T(s)$ gegeben sein.

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & y^{(3)}(t) + y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) & = & f'(t) \\
(b) & y^{(4)}(t) + 2\,y'''(t) + 2\,y''(t) + y'(t) + y(t) & = & f(t) \\
(c) & y''(t) + 10^{-8} y'(t) + y(t) & = & f(t) \\
(d) & T(s) & = & \dfrac{-s^2 + 17\,s + 2}{4\,s^3 + 3\,s^2 + 2\,s + 1} \\
(e) & T(s) & = & \dfrac{s}{s^3 + s^2 + 2\,s + 1}
\end{array}$$

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
stabil					
instabil					

Für eine korrekte Antwort erhalten Sie 2 Punkte und für eine fehlende Antwort $\frac{1}{2}$ Punkt. Das Resultat wird auf die nächste ganze Zahl gerundet.

Aufgabe 2: Lösen Sie das Randwertproblem

$$\ddot{y} + 5\,\dot{y} + 6\,y = 0 \quad \text{mit} \quad \dot{y}(0) = 0 \quad , \quad y(2) = 3$$

Die Lösung ist exakt anzugeben.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\,x(t) = x \cdot (1 - x) \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $0 \leq t \leq 3$ und $-1 \leq x \leq 2$.

(b) Skizzieren Sie die vier Lösungen mit den Anfangswerten $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.5$ und $x_0 = 2$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0.5$ **graphisch**.

(d) Verwenden Sie 2 Schritte des numerischen Verfahrens von Euler um die Lösung der Gleichung mit Anfangswert $x_0 = 0.5$ bei $t = 3$ zu bestimmen. Es genügt mit 4 signifikanten Stellen zu rechnen.

Aufgabe 4: Ein System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $x(t)$ ist gegeben als Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 40\,\dot{x}(t) + 1300\,x(t) = 300\,\frac{d}{dt}\,f(t)$$

(a) Bestimmen Sie die Transferfunktion $G(s)$.

(b) Untersuchen Sie den Bode–Plot des Amplitudenfaktors für

- sehr grosse Werte von $s = i\,\omega$
- sehr kleine Werte von $s = i\,\omega$

um den Bode–Plot zu erstellen. Es sollten sich zwei Geraden ergeben, die den Plot gut approximieren werden. Skizzieren Sie diese beiden Geraden für den Bereich $0.01 < \omega < 10000$.

(c) Der Wert ω_0 ist bestimmt durch den Schnittpunkt der beiden obigen Geraden. Bestimmen Sie ω_0 und den Wert der Transferfunktion $|G(i\,\omega_0)|$ für diese Winkelgeschwindigkeit.

Aufgabe 5: Untersuchen Sie das System

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,x(t) &= -\sin(1.4\,x(t)+2.4\,y(t)) \\
\frac{d}{dt}\,y(t) &= \exp(-0.6\,x(t)+0.4\,y(t))-1
\end{aligned}$$

(a) Approximieren Sie dieses System in der Nähe der Ursprungs $(0,0)$ durch ein lineares System.

(b) Beschreiben Sie die allgemeine Lösung des linearisierten Systems mit Hilfe von exakt berechneten Eigenwerten und Eigenvektoren.

(c) Skizzieren Sie das Verhalten der Lösungen des linearisierten Systems in der Nähe des Ursprungs.
