F2 a&r Mathematik 1
Schlussprüfung

Dr. Andreas Stahel, BFH-TI Biel
6. Februar 2017, 13.30 – 16:30, Zimmer O.12

Aufgabe 1:

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von

$$y''(x) + 4\,y'(x) + 13\,y(x) = x \quad \text{mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 2$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'''(x) - y'(x) = 0 \quad \text{mit } y(0) = 0 \text{ und } y(1) = 1$$

Für beide Teilaufgaben sind die Rechenschritte und Zwischenresultate klar anzugeben.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$\begin{aligned} A(s) &= \mathcal{L}[2\,t\cdot\cosh(3\,t)](s) \\ B(s) &= \mathcal{L}[e^{2\,t}\,t^4](s) \\ C(s) &= \mathcal{L}[\sin(\frac{\pi}{2}\,t)\,U(t-1)](s) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{s-3}{(s-2)\,(s+3)}](t) \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{4\,s}{(s+2)^2+16}](t) \end{aligned}$$

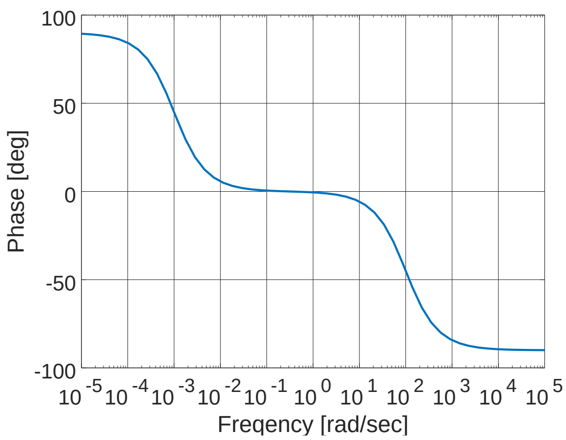
Aufgabe 3: Ein System mit Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$ ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 100.001\,\dot{y}(t) + \frac{1}{10}\,y(t) = 1000\,\dot{u}(t)$$

(a) Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$. Der Nenner ist in exakte Faktoren zu zerlegen.

(b) Untersuchen Sie die Transferfunktion $T(i\,\omega)$ auf den drei angegebenen Teilbereichen. Für den Bode Plot der Amplituden wird auf jedem der Segmente eine (approximative) Gerade entstehen.

- $0 < \omega \ll \frac{1}{1000}$
- $\frac{1}{1000} \ll \omega \ll 100$
- $100 \ll \omega$



(c) Skizzieren Sie den Bode-Plot der Amplituden unter Verwendung der vorangehenden Teilaufgabe.

(d) Verwenden Sie Ihren Bode Plot und den obigen Phasenplot mit den Werten der Transferfunktion bei $\omega = \frac{1}{1000}$ und $\omega = 100$ um den Nyquist Plot zu skizzieren.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= +2.5\,x(t) \quad +0.9\,y(t) \\ \dot{y}(t) &= -1.7\,x(t) \quad -1.4\,y(t) \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems quantitativ korrekt mit Hilfe von Eigenvektoren und Eigenwerten

(b) Skizzieren Sie einige Lösungen.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $L = \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$ für eine „typische“ Lösung.

(d) Für welche Anfangswerte $(x(0), y(0))$ konvergiert die Lösung gegen den Koordinatenursprung?
