F2 a&r Mathematik 1
Schlussprüfung

Dr. Andreas Stahel, BFH-TI Biel
5. Februar 2016, 13.30 – 16:30

Aufgabe 1: Finden Sie für die folgenden Ausdrücke die Laplacetransformation $Y(s)$ (resp. die ursprüngliche Funktion $y(t)$). Die Rechnungen sind zu zeigen.

(a) $y(t) = e^{3t}\sin(4t)$

(b) $y(t) = e^{-4t}U(t-3)$

(c) $y(t) = (t+2)^3$

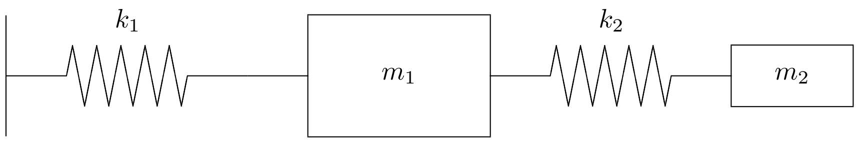
(d) $Y(s) = \dfrac{s+1}{s\,(s^2+7\,s+12)}$

(e) $Y(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2+4}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \frac{d}{dt}\,y(t) & = & e^{-3\,t}\,y(t) \\ (b) & y''(x) - 7\,y'(x) + 12\,y(x) & = & x \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0 \end{array}$$

Aufgabe 3: Betrachten Sie das untenstehende System von zwei schwingenden Massen, gekoppelt durch zwei Federn.



Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Auf die erste Masse wirke eine horizontale Kraft f der Form $f(t) = A\ \cos(\omega t)$.

(a) Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für die Grössen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.

(b) Finden Sie die Gleichungen für die Laplacetransformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ dieses Systems, wobei Sie die Anfangsbedingungen beliebig wählen dürfen.

(c) Finden Sie die Transferfunktion des Systems, wobei die Kraft $f(t)$ als Eingang und die Auslenkung $x_1(t)$ als Ausgang betrachtet wird.

(d) Seien m_1, k_1, k_2 und ω fest gegeben. Dann gibt es eine Wahl von m_2, welche die Auslenkung (Amplitude) von $x_1(t)$ so klein wie möglich macht. Finden Sie diesen Wert von m_2.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = -x\,y^2(x) + x \quad \text{mit} \quad y(0) = 2$$

(a) Verwenden Sie zwei Schritte des Verfahrens von Euler um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

(b) Verwenden Sie einen Schritt des Verfahrens von Runge-Kutta um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

Aufgabe 5: Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} \dot{x} & -2\,x & -4\,y & = & f\,(t) \\ \dot{y} & -24\,x & +2\,y & = & 0 \end{array}$$

als System mit Eingang $f\,(t)$ und Ausgang $y\,(t)$.

(a) Zu bestimmen ist die Transferfunktion $G(s)$ des Systems.

(b) Setzen Sie $f(t) = 0$ und skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems quantitativ korrekt mit Hilfe von Eigenvektoren.

(c) Skizzieren Sie einige Lösungen.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert $L = \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$ für eine „typische“ Lösung.
