F2a Mathematik 1 / mathematique 1
Schlussprüfung / examen final

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
31.1.2011, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Finden Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes.

(a) $\dot{x}(t) = x^2(t)$ mit/avec $x(0) = 1$

(b) $\ddot{x}(t) = 2\,x(t)$ mit/avec $x(0) = 1$

(c) $\ddot{x}(t) = 2\,x(t) + t$ mit/avec $\dot{x}(0) = 1$

Tipp: verwende cosh() und sinh().

Tip: utiliser cosh() et sinh().

Aufgabe / problème 2:

La solution générale d'une équation différentielle est donnée par

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(x) = c_1\,\cos(3\,x) + c_2\,\sin(3\,x) + x^2 + e^x$$

Trouver une des équations différentielles possible avec la solution ci–dessus.

Bestimmen Sie eine mögliche Differentialgleichung mit der obigen Lösung.

Aufgabe / problème 3:

Finden Sie für die folgenden Ausdrücke die Laplacetransformation $Y(s)$ (resp. die ursprüngliche Funktion $y(t)$). Die Rechnungen sind zu zeigen.

Pour les expressions suivantes trouver la transformation de Laplace $Y(s)$ (resp. la fonction originale $y(t)$). Montrer les pas intermédiaires.

(a) $f(t) = (t-1)^2$

(b) $g(t) = e^{-3\,t}\,\cos(\pi\,t)$

(c) $H(s) = \dfrac{s+3}{s\,(s-2)}$

(d) $K(s) = \dfrac{s}{(s+3)^3}$

(e) $L(s) = \dfrac{s-3}{s^2+2\,s+4}$

Aufgabe / problème 4:

Untersuchen Sie die Gleichung

Examiner l'équation

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = x^2\, y(x) - x \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = 1$$

(a) Verwenden Sie zwei Schritte des Verfahrens von Euler um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

(b) Verwenden Sie einen Schritt des Verfahrens von Runge-Kutta um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

(a) Utiliser deux pas de la méthode de Euler pour trouver une approximation pour $y(1)$. Montrer les calculs intermédiaires.

(b) Utiliser un pas de la méthode de Runge-Kutta pour trouver une approximation pour $y(1)$. Montrer les calculs intermédiaires.

Aufgabe / problème 5:

Für die Spannung $y(t)$ über einem RC-Glied gilt die Differentialgleichung

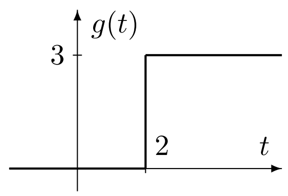
Pour la tension $y(t)$ sur un élément RC on trouve l'équation différentielle

$$RC\, \frac{d\, y(t)}{dt} + y(t) = g(t)$$

Hierbei ist $g(t)$ die unten gezeigte Eingangsspannung. Zur Zeit $t = 0$ sei $y(0) = 1$. Zu untersuchen ist die resultierende Ausgangsspannung $y(t)$.

La tension d'entrée $g(t)$ est montrée ci–dessous. Pour le temps initial $t = 0$ on a $y(0) = 1$. Examiner la tension de sortie $y(t)$.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls/si} \quad t \leq 2 \\ 3 & \text{falls/si} \quad t > 2 \end{cases}$$



(a) Berechnen Sie $y(t)$ mit Hilfe von Laplacetransformationen.

(b) Bestimmen Sie $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$

(a) Calculer $y(t)$ à l'aide des transformations de Laplace.

(b) Calculer $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$

Aufgabe / problème 6:

Die Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ besteht aus einem Parabelstück von $(-1,1)$ zu $(1,1)$, durch den Ursprung. Betrachten Sie die Funktion

La courbe $C \subset \mathbb{R}^2$ est formée d'un secteur d'une parabole du point $(-1,1)$ au point $(1,1)$, passant par l'origine. Examiner la fonction

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4\, y \end{pmatrix}$$

$$A = \int_C \vec{F}(x,y) \cdot \vec{ds} \quad \text{und/et} \quad B = \int_C \|\vec{F}(x,y)\|\, ds$$

(a) Stellen Sie das bestimmte Integral für A auf. Anschliessend ist der exakte Wert von A zu bestimmen.

(b) Stellen Sie das bestimmte Integral für B auf. Anschliessend ist der Wert von B zu bestimmen.

(a) Donner l'intégrale definie pour A et puis trouver la valeur exacte de A.

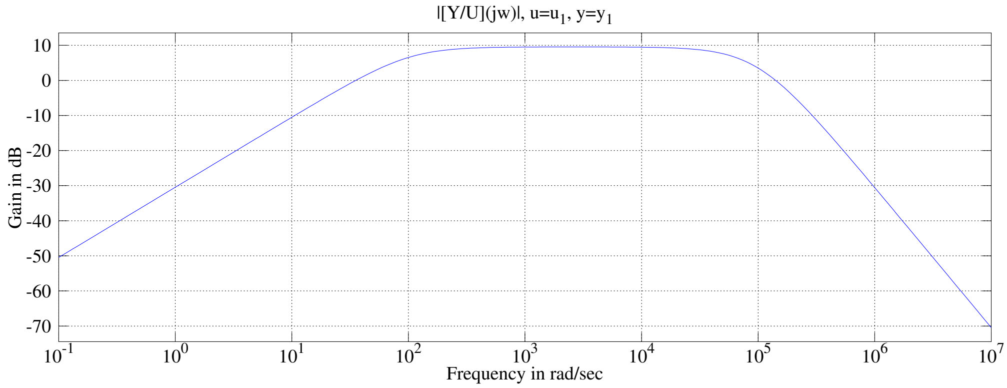
(b) Donner l'intégrale definie pour B et puis trouver la valeur de B.

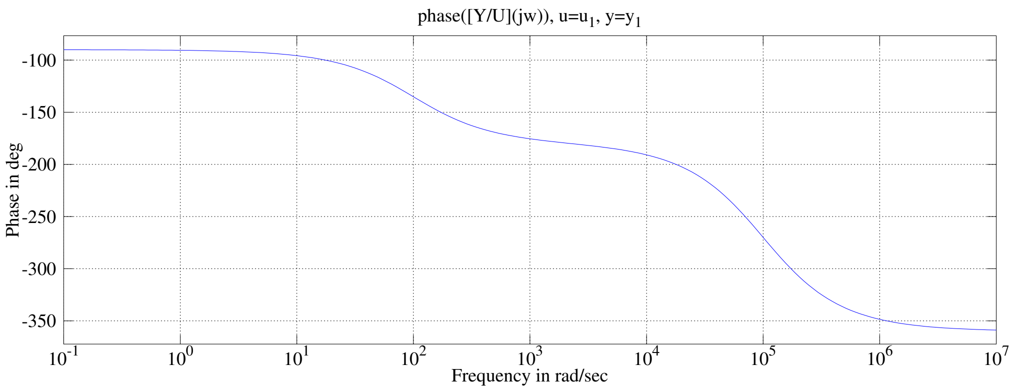
Aufgabe / problème 7:

Untersuchen Sie die Transferfunktion $G(s)$ eines Systems und den Bode Plot.

Examiner la fonction de transfer $G(s)$ et le plot de Bode ci–dessous.

$$G(s) = \frac{A\,s}{B\,s^n + 20\,s^2 + 10^6\,s + 10^8}$$





(a) Bestimmen Sie den numerischen Wert von A mit Hilfe der Geraden links im Bode Plot.

(b) Bestimmen Sie die numerischen Werte von n und B mit Hilfe der Geraden rechts im Bode Plot.

(c) Skizzieren Sie den Nyquist Plot.

(a) Trouver la valeur numérique de A à l'aide de la droite à gauche dans le plot de Bode.

(b) Trouver les valeurs numériques de n et B à l'aide de la droite à droite dans le plot de Bode.

(c) Esquisser le plot de Nyquist.
