F2a Mathematik 1 / mathematique 1
Schlussprüfung / examen final

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
26.1.2009, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Die untenstehende Kurve liegt auf der Aussenfläche eines Zylinder mit Radius 2 und der z-Achse als Achse. Ein Massenpunkt bewegt sich entlang dieser Kurve für Zeiten $0 \leq t \leq 5$. Die absolute Geschwindigkeit und die Komponente in z-Richtung sind konstant. Die Masse startet auf der Höhe $z = 0$ und ist zur Zeit $t = 5$ auf der Höhe $z = \frac{5}{4}$.

(a) Finden Sie die Parametrisierung des Massenpunktes entlang dieser Kurve.

(b) Bestimmen Sie die Länge dieser Kurve.

(c) Schreiben Sie die Integrale an, um die Schwerpunktskoordinaten $\vec{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$ der Kurve zu bestimmen.

(d) Berechnen Sie $\vec{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$.

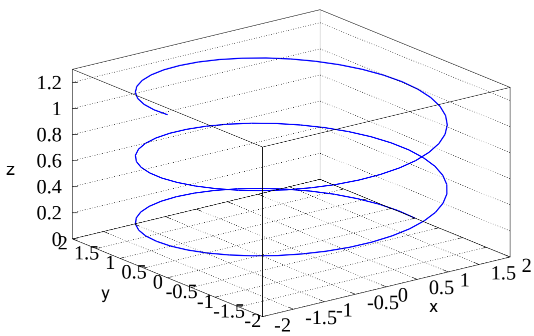
La courbe montré ci–dessous se trouve sur la face d'un cylindre de rayon 2 avec l'axe des z comme axe du cylindre. Un point de masse bouge sur cette courbe pour les temps $0 \leq t \leq 5$. La vitesse absolue et sa composante dans la direction z sont constantes. Le point de départ se trouve sur le niveau $z = 0$ et pour le temps $t = 5$ on sait que $z = \frac{5}{4}$.

(a) Trouver la paramétrisation pour cet point de masse suivant la courbe.

(b) Trouver la longueur de la courbe.

(c) Donner les intégrales pour calculer les coordonnées du centre de gravité $\vec{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$ de la courbe.

(d) Calculer $\vec{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$.



Aufgabe / problème 2:

Finden Sie für die folgenden Ausdrücke die Laplacetransformation $Y(s)$ (resp. die ursprüngliche Funktion $y(t)$). Die Rechnungen sind zu zeigen.

Pour les expressions suivantes trouver la transformation de Laplace $Y(s)$ (resp. la fonction originale $y(t)$). Montrer les pas intermédiaires.

(a) $y(t) = t^2 \sin(2t)$

(b) $y(t) = e^{-2t} U(t-3)$

(c) $y(t) = (t+3)^2$

(d) $Y(s) = \dfrac{s-4}{s^2 + 2s + 6}$

(e) $Y(s) = \dfrac{s+2}{(s-1)(s+1)}$

Aufgabe / problème 3:

Trouver toutes les solutions **exactes** générales des équations différentielles suivantes. Montrer les calculations.

Bestimmen Sie die **exakten** allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \frac{d^4}{dt^4}\,y(t) & = & k^4\,y(t) \quad \text{avec/wobei} \quad k>0 \\
(b) & \ddot{y}(t)+4\,\dot{y}(t)+13\,y(t) & = & 0 \quad \text{avec/mit} \quad y(0)=0 \\
(c) & \ddot{y}(t)+4\,\dot{y}(t)+13\,y(t) & = & 7\,t
\end{array}
$$

Aufgabe / problème 4:

Examiner l'équation

Untersuchen Sie die Gleichung

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}\,x(t) \quad \text{avec/mit} \quad x(0)=2$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung.

(b) Verwenden Sie 2 Schritte des Verfahrens von Heun um $x(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

(a) Trouver la solution exacte.

(b) Utiliser 2 pas de la méthode de Heun pour trouver une approximation pour $x(1)$. Montrer les calculations intermédiaires.

Aufgabe / problème 5:

Untersuchen Sie das System von Differentialgleichungen

Examiner le système des équations différentielles

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieses Systems.

(b) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $-2 \leq x, y \leq 2$.

(c) Sei $(x(t), y(t))$ eine typische Lösung. Bestimmen Sie A und B.

Tipp: Eigenvektoren

(a) Trouver la solution générale de ce système.

(b) Esquisser le champ vectorielle pour la domaine $-2 \leq x, y \leq 2$.

(c) Soit $(x(t), y(t))$ une solution typique. Trouver les valeurs de A et B.

Tip: vecteurs propres.

$$A = \lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{und/et} \quad B = \lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)}$$

Aufgabe / problème 6:

Untersuchen sie das System mit Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$.

Examiner le système avec entrée $u(t)$ et sortie $y(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \frac{1}{10}\,x(t) &= \dot{u}(t) \\ 1000\,\dot{y}(t) + y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$. Der Nenner ist in Faktoren zu zerlegen.

(b) Untersuchen Sie die Transferfunktion $T(\imath\,\omega)$ auf den drei Teilbereichen

- $\omega \ll \frac{1}{1000}$
- $\frac{1}{1000} \ll \omega \ll \frac{1}{10}$
- $\frac{1}{10} \ll \omega$

Für den Bode Plot der Amplituden wird auf jedem der Segmente eine Gerade entstehen.

(c) Skizzieren Sie den Bode-Plot der Amplituden auf dem Bereich $10^{-5} \leq \omega \leq 10$ unter Verwendung der vorangehenden Teilaufgabe.

(a) Trouver la fonction de transfert $T(s)$. Factoriser le dénominateur.

(b) Examiner la fonction de transfert $T(\imath\,\omega)$ dans les trois domaines

- $\omega \ll \frac{1}{1000}$
- $\frac{1}{1000} \ll \omega \ll \frac{1}{10}$
- $\frac{1}{10} \ll \omega$

Pour chaque domaine le plot de Bode pour les amplitudes sera une droite.

(c) Esquisser le plot de Bode pour les amplitudes pour la domaine $10^{-5} \leq \omega \leq 10$ en utilisant vos résultats précédents.