F2a Mathematik 1 / mathematique 1
Schlussprüfung / examen final

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
5.3.2007, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Trouver toutes les solutions générales des équations différentielles suivantes. Montrer les calculations.

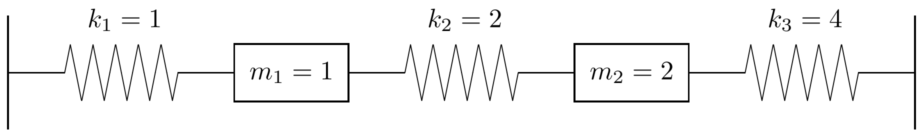
Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

(a)	$\dot{y} - y = 1$	avec/mit $y(0) = 1$
(b)	$\dot{y} + 4\,y = e^{-4\,t}$	avec/mit $y(0) = 2$
(c)	$\ddot{y} + 5\,\dot{y} + 4\,y = 0$	avec/mit $y(0) = 1 \quad , \quad \dot{y}(0) = 0$
(d)	$\ddot{y} + y = \cos(2\,t)$	avec/mit $y(0) = 1 \quad , \quad \dot{y}(0) = -1$
(e)	$y^{(4)}\,(x) - y\,(x) = 0$	avec/mit $y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,,\ y''(0) = -1\,,\ y^{(3)}(0) = 0$

Aufgabe / problème 2:

Das untenstehende Feder-Masse-System kann beschrieben werden durch ein System von Differentialgleichungen.

Le système des masses et ressort ci–dessous peut être représenté par un système des équations différentielles.



(a) (Ohne Reibung) Schreiben Sie diese Gleichungen in der Form $\ddot{\vec{x}} = \mathbf{A}\,\vec{x}$.

(b) (Ohne Reibung) Bestimmen Sie die zwei in den Lösungen vorkommenden Frequenzen. Bestimmen Sie das Verhältnis der Maximalamplituden der beiden Massen für die langsamere Eigenschwingung.

(c) (Mit Reibung) Nun wird die Bewegung beider Massen gedämpft durch Kräfte der Form $-1\,\dot{x}_i$. Schreiben Sie das neue System in der Form $\dot{y} = \mathbf{B}\,\vec{y}$ mit einer geeigneten 4×4–Matrix $\mathbf{B}$.

(d) (Mit Reibung) Mit welchem Exponenten α in $e^{-\alpha\,t}$ konvergiert eine typische Lösung gegen Null?

(a) (Sans frottement) Écrire ce système dans la forme $\ddot{\vec{x}} = \mathbf{A}\,\vec{x}$.

(b) (Sans frottement) Trouver les deux fréquences dans les solutions. Trouver le rapport des deux amplitudes maximales pour l'oscillation plus lente.

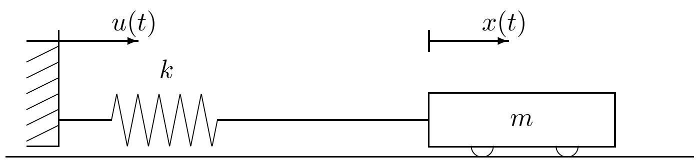
(c) (Avec frottement) Le mouvement des deux masses est freiné par des forces $-1\,\dot{x}_i$. Écrire le nouveau système dans la forme $\dot{y} = \mathbf{B}\,\vec{y}$ avec une matrice $\mathbf{B}$ le largeur 4×4.

(d) (Avec frottement) Avec quel exposant α en $e^{-\alpha\,t}$ converge une solution typique vers zéro?

Aufgabe / problème 3:

In der untenstehenden Figur gilt $m = 2$ kg, $k = 50$ N/m und $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Die Funktion $u(t)$ ist bekannt, sie entspricht der Position der beweglichen Wand links.

Dans la figure ci–dessous on a $m = 2$ kg, $k = 50$ N/m et $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. La fonction $u(t)$ est connue, elle donne la position du paroi mobile à gauche.



(a) Verwenden Sie das Gesetz von Newton um die Differentialgleichung für $x(t)$ aufzustellen.

(b) Verwenden Sie Laplacetransformation um eine Integralformel für $x(t)$ zu finden. Das Integral enthält die Funktion u.
Tipp: Faltung

(c) Berechnen Sie $x(t)$ für $t > 2$ für das unten gegebene $u(t)$.

(a) Utiliser la loi de Newton pour trouver une équation différentielle pour $x(t)$.

(b) Utiliser une transformation de Laplace pour trouver un intégral pour la fonction $x(t)$. L'intégral contient la function u .
Tip: convolution.

(c) Calculer $x(t)$ pour $t > 2$ si $u(t)$ est donné par la fonction ci–dessous.

$$u(t) = 1 - U(t-2) = \begin{cases} 1 & \text{falls/si} \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{falls/si} \quad t > 2 \end{cases}$$

Aufgabe / problème 4:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = x \cdot (1-x) \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = x_0$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $0 \leq t \leq 3$ und $-1 \leq x \leq 2$.

(b) Skizzieren Sie die vier Lösungen mit den mit Anfangswerten $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.5$ und $x_0 = 2$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0.5$ **graphisch**.

(a) Esquisser le champ vectoriel pour le domaine $0 \leq t \leq 3$ et $-1 \leq x \leq 2$.

(b) Esquisser les quatre solutions avec les valeurs initiales $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.5$ et $x_0 = 2$.

(c) Déterminer la limite $\lim_{t\to\infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 0.5$ en utilisant un argument **graphique**.

Aufgabe / problème 5:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = x \cdot (1-x) \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = x_0$$

(a) Finden Sie die **exakte** Lösung der Differentialgleichung, ohne Anfangsbedingung. Die Rechnungen sind zu zeigen. Verwenden Sie $0 < x < 1$.

(b) Verwenden Sie einen Schritt des numerischen Verfahrens von Runge–Kutta um die Lösung der Gleichung mit Anfangswert $x_0 = 0.5$ bei $t = 1$ zu bestimmen. Es genügt, mit 4 signifikanten Stellen zu rechnen.

(a) Trouver les solutions **exactes** de cette équation différentielle, sans condition initial. Montrer les calculations. Utiliser $0 < x < 1$.

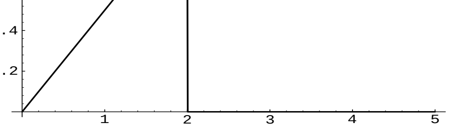
(b) Appliquer un pas de la méthode numérique de Runge–Kutta pour trouver la valeur de la solution avec valeur initiale $x_0 = 0.5$ au temps $t = 1$. Il suffit de calculer avec 4 chiffres significatifs.

Aufgabe / problème 6:

Untersuchen Sie die rechtsstehende Funktion $f(t)$ und die entsprechende Laplacetransformation $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.

$$f(t) = \begin{cases} t/2 & \text{für/pour} \quad 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{für/pour} \quad 2 \leq t \end{cases}$$

Examiner la function $f(t)$ montrée à droite et sa transformation de Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.



(a) Berechnen Sie $F(s)$ mit Hilfe der Definition der Laplacetransformation als Integral.

(b) Schreiben Sie die Funktion $f(t)$ als Summe und Produkt von elementaren Funktionen und Schrittfunktionen. Bestimmen Sie $F(s)$ auch aufgrund dieser Rechnung.

(c) Die obige Funktion wird 10–periodisch fortgesetzt zur neuen Funktion $g(t)$, d.h. nach 10, 20, 30, ... Zeiteinheiten wird das Rampensignal jeweils noch einmal eingeschaltet. Berechnen Sie $G(s) = \mathcal{L}\,[g(t)\,](s)$.

(a) Déterminer $F(s)$ à l'aide de la définition de la transformation de Laplace comme intégrale.

(b) Réécrire la fonction $f(t)$ comme somme et produit des fonctions élémentaires et fonctions de pas. Puis trouver $F(s)$ aussi à l'aide de ce résultat.

(c) La fonction ci–dessus est répété avec une période de 10 pour une nouvelle fonction $g(t)$. Donc le triangle réapparaisse aussi après 10, 20, 30, ... unités de temps. Calculer $G(s) = \mathcal{L}\,[g(t)\,](s)$.

Aufgabe / problème 7:

Examiner le système avec input $f(t)$ et output $y(t)$ (resp. $F(s)$ et $Y(s)$).

Untersuchen Sie das folgende System mit Input $f(t)$ und Output $y(t)$ (resp. $F(s)$ und $Y(s)$).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -3\,x(t) + y(t) + f(t)\\ \dot{y}(t) &= +x(t) - 4\,y(t)\end{aligned}$$

(a) Montrer que toutes les solutions du système homogène tendent vers zéro comme $e^{-\alpha\,t}$ et trouver la valeur de l'exposant α .

(b) Trouver la fonction de transfert $T(s)$.

(c) Esquisser les deux plots de Bode à l'aide de deux droites et la valeur de la fonction de transfert pour $\omega = 3$.

(a) Zeigen Sie, dass das alle Lösungen des homogenen Systems gegen Null konvergieren wie $e^{-\alpha t}$ und bestimmen Sie den Exponenten α .

(b) Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$.

(c) Skizzieren Sie die beiden Bode Plots mit Hilfe von je zwei Geraden und dem Wert der Transferfunktion bei $\omega = 3$.
