F1a

Lineare Algebra und Geometrie 1 / algèbre linéaire et géometrie 1
Schlussprüfung / examen final

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
28.1.2008, 8:00 – 10:00

Aufgabe / problème 1:

Gegeben seien die Vektoren und Matrizen

Etant donné les vecteurs et matrices

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie

Calculer

(a) $2\,\vec{a} - \vec{b}$ (b) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (c) $\|\vec{a} + \vec{b}\|$ (d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
(e) $\mathbf{A} \cdot \vec{b}$ (f) $\mathbf{B} \cdot \vec{a}$ (g) $\langle \vec{a} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (h) $\vec{a} \times \vec{b}$

Aufgabe / problème 2:

(a) Soit $z_1 = 1 - i\,3$ et $z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ et $\sqrt{z_2}$ d'une façon **exacte** (sans calculatrice).

(b) Soit $G \subset \mathbb{C}$ le troisième quadrant dans le plan complexe avec norme plus petit que 2, c.-à-d. les nombres $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ avec $x < 0$ et $y < 0$ et $x^2 + y^2 \leq 2^2$. Calculer les racines de tous ces nombres en G et dessiner cette nouveau domaine.

(a) Sei $z_1 = 1 - i\,3$ und $z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Bestimmen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\sqrt{z_2}$ **exakt**, d.h. ohne Taschenrechner.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ der dritte Quadrant in der komplexen Ebene mit Betrag kleiner als 2, d.h. alle Zahlen $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $x < 0$ und $y < 0$ und $x^2 + y^2 \leq 2^2$. Ziehen Sie die Quadratwurzel $\sqrt{z}$ aus allen Zahlen in G und skizzieren Sie den entstehenden Bereich.

Aufgabe / problème 3:

Im folgenden komplexen Gleichungssystem sind die Werte der komplexen Konstanten c_1 und c_2, so dass dieses System unendlich viele Lösungen hat.

(a) Bestimmen Sie die Werte von c_1 und c_2.

(b) Geben Sie **eine** Lösung des Systems an.

Pour le système des équations complexes ci–dessous les constantes complexe c_1 et c_2 sont tel que le système a infiniment de solutions.

(a) Déterminer les valeurs de c_1 et c_2.

(b) Trouver **une** solution du système.

$$\begin{array}{ccccccc} z_1 & + & i\,z_2 & + & 2\,z_3 & = & c_2 \\ 2\,i\,z_1 & + & z_2 & + & c_1\,z_3 & = & 0 \\ 4\,i\,z_1 & + & 5\,z_2 & + & z_3 & = & i \end{array}$$

Aufgabe / problème 4:

Examiner les points (x_i, y_i) ci dessous et essayer de mettre une droite (resp. une parabole) par ces points le plus proche possible (régression linéaire).

Untersuchen Sie die untenstehenden Punkte (x_i, y_i) und versuchen Sie eine Greade (resp. Parabel) möglichst gut durch diese Punkte zu legen (lineare Regression).

$$(x_1, y_1) = (0,3) \quad , \quad (x_2, y_2) = (1,3) \quad , \quad (x_3, y_3) = (3,4) \quad , \quad (x_4, y_4) = (4,5) \quad , \quad (x_5, y_5) = (5,6)$$

(a) Trouver l'équation de la droite.

(b) Trouver un système des équations linéaires pour les coefficients de la parabole.

(c) Trouver la parabole.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden.

(b) Finden Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten der Parabel.

(c) Bestimmen Sie die Parabel.

Aufgabe / problème 5:

La commande `LU(A)` d'une calculatrice rend le résultat ci–dessous.

Der Befehl `LU(A)` eines Taschenrechners liefert das untenstehende Resultat.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et/und} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Trouver **A**.

(b) Déterminer toutes les solutions $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ du système des équations linéaires ci–dessous.

(a) Bestimmen Sie **A**.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe / problème 6:

Der Kreis C mit Mittelpunkt $\vec{M} = (3\,,\,1)$ berührt die Gerade $y = -1 - 2\,x$.

(a) Bestimmen Sie die Kreisgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kreises C mit der Geraden $x + y = 4$.

Le cercle C avec centre $\vec{M} = (3\,,\,1)$ touche la droite $y = -1 - 2\,x$.

(a) Trouver l'équation du cercle.

(b) Trouver les points d'intersection du cercle C avec la droite $x + y = 4$.
