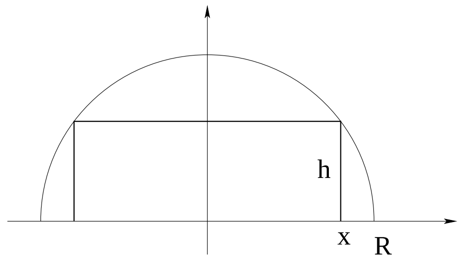
**F1a Analysis 2 / analyse 2**
**Schlussprüfung / examen final**

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
16.8.2010, 8:00 – 11:00, room 509

**Aufgabe / problème 1:**

Pour la figure à droite on applique une rotation par rapport à l'axe verticale. On obtient une demie boule avec un cylindre à l'intérieur. Le rayon $R$ est donné. Rendre des résultats **exacte**.

Die rechtsstehende Figur wird um die vertikale Achse rotiert, sodass eine Halbkugel mit eingeschriebenem Rotationszylinder entsteht. Der Radius $R$ ist gegeben. Die Rechnungen müssen **exakt** sein.




(a) Pour quelle valeur de $x$ le volume du cylindre est–il maximal?

(b) Calculer le rapport du volume maximal du cylindre et la demie boule.

(a) Wie muss $x$ gewählt werden, damit das Volumen $V$ des Zylinders maximal wird.

(b) Bestimmen Sie das Verhältnis von maximalem Zylindervolumen zu Volumen der Halbkugel.

---

**Aufgabe / problème 2:**

Calculer les expressions $A$, $B$, $C$ und $D$ ci–dessous d'une façon exacte, **sans utiliser la calculatrice**.

Berechnen Sie die untenstehenden Ausdrücke $A$, $B$, $C$ und $D$ exakt, **ohne den Taschenrechner zu verwenden**.

$$A = \int_{-\pi}^{2\pi} \sin(x) + x^2 \, dx$$

$$B = \int_{-2}^{2} (1+x)\cosh(x) \, dx$$

$$C = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\sin(x)}{x} \, dx$$

$$D = \int x \ln x \, dx$$

Tuyau pour $B$: partager en deux intégrales et symétrie
Tuyau pour $D$: intégration par partie

Tipp zu $B$: Aufteilen in zwei Integrale und Symmetrie verwenden.
Tipp zu $D$: partielle Integration

---

**Aufgabe / problème 3:**

Eine oben offene Schachtel hat Innenmasse von Breite $b = 100$ mm, Länge $l = 200$ mm und Höhe $h = 50$ mm. Die Wandstärke der Metalwand ist $d = 1.5$ mm .

Une boite est ouvert en haut et les dimension dans intérieur sont: profondeur $b = 100$ mm, longueur $l = 200$ mm et hauteur $h = 50$ mm. L'épaisseur du parois métalique est $d = 1.5$ mm .

(a) Bestimmen Sie das Innenvolumen $V_i$ und das Aussenvolumen $V_a$ exakt.

(b) Bestimmen Sie das Volumen der Metalwand mit Hilfe einer **linearen Approximation** für die Volumendifferenz $\Delta V = V_a - V_i$.

(a) Calculer le volume intérieur $V_i$ et le volume extérieur $V_a$ d'une façon exacte.

(b) Déterminer le volume du parois métalique à l'aide d'une **approximation linéaire** de la différence des volumes $\Delta V = V_a - V_i$.

---

**Aufgabe / problème 4:**

Examiner la demie boule de rayon $R$, veut dire $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ und $z>0$.

(a) Donner une intégral pour le volume de la demie boule.

(b) Determiner le centre de gravité de cette demie boule à l'aide d'une intégrale.

Tuyau: Utiliser le rayon du cercle d'une intersection sur hauteur $z$.

Untersuchen Sie eine Halkugel mit Radius $R$, d.h. $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ und $z>0$.

(a) Stellen Sie ein Intgeral auf, um das Volumen zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halkugel mit Hilfe eines Integrals.

Tipp: Bestimmen Sie den Radius des Schnittkreises auf Höhe $z$.

---

**Aufgabe / problème 5:**

Die Funktion $f(x)=\sin(x)\,e^x$ hat Funktionswerte von 1 in der Nähe von $n\,\pi$, d.h. $f(x_n)=1$ mit $x_n \approx n\,\pi$ .

(a) Verwenden Sie einen Schritt des Newton Verfahrens um eine approximative **Formel** zu finden für die Werte von $x_n$.

(b) Verwenden Sie Ihre obige Formel um $x_2$ nahe bei $2\,\pi$ zu bestimmen.

(c) Erklären Sie wieso die naive Approximation $x_n \approx n\,\pi$ für grosse Werte von $n$ bereits von exzellenter Qualität ist.

La fonction $f(x)=\sin(x)\,e^x$ attein la valeur 1 pour un $x_n$ proche de $n\,\pi$, veut dire $f(x_n)=1$ avec $x_n \approx n\,\pi$ .

(a) Utiliser un pas de la méthode de Newton pour trouver une **formule** approximative pour les valeurs de $x_n$.

(b) Utiliser votre formule ci–dessus pour calculer $x_2$ proche à $2\,\pi$ .

(c) Expliquer pourquoi l'approximation naïve $x_n = n\,\pi$ est de très bonne qualité pour $n$ grande.

---

**Aufgabe / problème 6:**

Ein ideal elastischer Ball fällt aus einer Höhe von 1.5 m auf ein Brett mit einer Steigung von 1/4. Der Auftreffpunkt ist 0.5 m über der Unterlage. Die Schnelligkeit vor und nach dem Auftreffen sind gleich gross. Die Schnelligkeit nach einem Fall der Höhe $h$ ist gegeben durch $v=\sqrt{2\,g\,h}$. Verwenden Sie $g=10\,\frac{m}{s^2}$.

(a) Beim Aufprall gilt das Gesetz: der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallsswinkel. Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit (als Vektor) der Wurfparabel nach dem Aufprall.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung der Wurfparabel des Balles nach dem Auftreffen auf dem Brett.

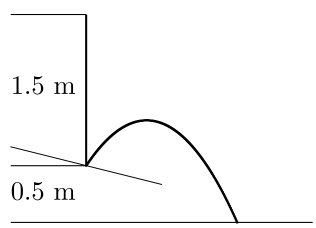
(c) Wo und wann trifft der Ball auf den Boden auf?

Une petite balle élastique tombe de 1.5 mètres sur une planche avec une pente de 1/4. Le point de contacte se trouve à une hauteur de 0.5 m au dessus du sol. Les rapidités avant et après le contact sont égales. Après une chute de hauteur $h$ la rapidité est donné par $v=\sqrt{2\,g\,h}$. Utiliser $g=10\,\frac{m}{s^2}$.

(a) L'angle de rebondissement est le même que l'angle d'incidence. Trouver la vitesse initiale (comme vecteur) de la trajectoire de la balle après son contact avec la planche.

(b) Trouver une paramétrisation de la trajectoire parabolique de la balle après son contact avec la planche.

(c) Quand et ou la balle touche le sol.




---