F1 Analysis 2 / analyse 2
Vordiplom / examen propédeutique

Dr. Andreas Stahel
BFH-TI Biel
11. September 2006, 8:00 – 11:00

Aufgabe / problème 1:

Les constantes a et b sont positives. Examiner la fonction

Die Konstanten a und b sind positiv. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = a\,x\,e^{-b\,x} \ .$$

(a) La fonction atteint un maximum au point $(1, 2)$. Trouver les valeurs des constantes a et b.

(b) Trouver la coordonnée x du point d'inflexion.

(a) Die Funktion hat ein Maximum beim Punkt $(1\,,\,2)$. Bestimmen Sie die Werte der Konstanten a und b.

(b) Finden Sie die x-Koordinate des Wendepunktes.

Aufgabe / problème 2:

Für ein Pendel der Länge $l = 2$ m und Schwingungsdauer $T = 2.84$ s gilt die Beziehung

Pour un pendule de longueur $l = 2$ m et une période de $T = 2.84$ s on utilise la relation

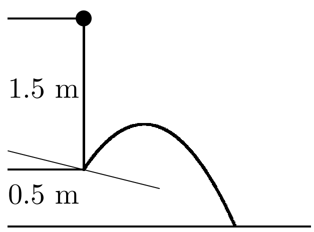
$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Somit kann die Gravitationskonstante g bestimmt werden. Mit welcher realtiven Genauigkeit müssen l und T gemessen werden, damit der relative Fehler in g sicher kleiner als 1% ist?

Donc on peut calculer la constante de gravitation g. Avec quel résolution relative doit on mesurer l et T, de telle sorte que l'erreur relative en g est certainement plus petit que 1% ?

Aufgabe / problème 3:

Ein ideal elastischer Ball fällt aus einer Höhe von $h = 1.5$ m auf ein Brett mit einer Steigung von 1/4. Der Auftreffpunkt ist 0.5 m über der Unterlage. Die Schnelligkeit vor und nach dem Auftreffen sind gleich gross. Die Schnelligkeit nach einem Fall der Höhe h ist gegeben durch $v = \sqrt{2\,g\,h}$. Verwenden Sie $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Une petite balle élastique tombe d'une hauter de 1.5 mètres sur un panneau plat avec une pente de 1/4. Le point de contact est 0.5 m au-dessus du sol. La balle arrive sur le panneau avec une vitesse de $v = \sqrt{2\,g\,h}$ et repart avec la même vitesse. Utiliser $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

(a) Beim Aufprall gilt das Gesetz: der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallsswinkel. Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit (als Vektor) der Wurfparabel nach dem Aufprall.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung der Wurfparabel des Balles nach dem Auftreffen auf dem Brett. Hinweis: es gilt $\ddot{x}(t) = 0$ und $\ddot{y}(t) = -g$.

(c) Wo und wann trifft der Ball auf den Boden auf?

(a) L'angle de rebond est le même que l'angle d'incidence. Trouver la vitesse initiale (comme vecteur) de la trajectoire de la balle après son contact avec le panneau.

(b) Trouver une paramétrisation de la trajectoire parabolique de la balle après son contact avec le panneau. Indication: on sait que $\ddot{x}(t) = 0$ et $\ddot{y}(t) = -g$.

(c) Quand et où la balle va-t-elle toucher le sol?

Aufgabe / problème 4:

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 32\,x - 4\,y + 52$$

(a) In welche Richtung (in xy–Ebene) hat die Fläche $z = f(x,y)$ die grösste Steigung bei $(x,y) = (0,0)$ und wie steil (als Winkel) ist die Fläche?

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte dieser Funktion und entscheiden Sie ob ein Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

(a) Dans quelle direction (dans le plan des xy) la surface monte le plus rapidement possible au point $(x,y) = (0,0)$ et quel est l'angle de montée?

(b) Trouver tous les points critiques de cette fonction et décider s'il s'agit d'un minimum, maximum ou d'un point de col.

Aufgabe / problème 5:

Betrachten Sie das Flächenstück zwischen der x–Achse und der Kurve $y = e^{-x^2}$. Zu untersuchen ist der Bereich $0 \leq x \leq R$.

(a) Die Fläche wird um die y-Achse rotiert. Stellen Sie das Integral auf, um das enstehende Volumen V zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie das obige Integral mittels einer Substitution $u = x^2$. Zeigen Sie die Rechenschritte.

(c) Die Kurve $y = e^{-x^2}$ für $0 \leq x \leq R$ wird um die y-Achse rotiert. Stellen Sie das Integral auf, um die entstehende Oberfläche zu bestimmen. Das Integral ist nicht zu berechnen.

Considérer l'aire entre l'axe des x et la courbe $y = e^{-x^2}$. Examiner les valeurs de x telles que $0 \leq x \leq R$.

(a) On applique une rotation par rapport à l'axe des y. Donner l'intégral pour le volume V de ce solide de rotation.

(b) Calculer l'intégrale ci–dessus à l'aide d'une substitution $u = x^2$. Montrer les pas intermédiaires.

(c) Examiner la courbe $y = e^{-x^2}$ pour $0 \leq x \leq R$ et appliquer une rotation par rapport à l'axe des y. Trouver l'intégrale pour l'aire de cette surface de révolution. Ne pas calculer l'intégrale.

Aufgabe / problème 6:

Betrachten Sie das Integral

Examiner l'intégrale

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

Eine analytische Integration ist hier nicht möglich.

(a) Teilen Sie das Interval in 4 Stücke gleicher Länge auf und berechnen Sie das Integral approximativ mit Hilfe der Methode von **Simpson**.

(b) Wie viele Werte der Funktion müssen berechnet werden, damit der Fehler bei einer numerischen Integration mit Hilfe der **Trapezregel** kleiner als 10^{-6} wird? Die Antwort ist zu begründen.

Une intégration exacte n'est pas possible pour cette fonction.

(a) Diviser l'intervalle en 4 secteurs de longueurs identiques et puis calculer une valeur approximative à l'aide de la formule de **Simpson**.

(b) Combien de valeurs de la fonction doivent-elles être calculées avec la **méthode des trapèzes**? On demande une erreur plus petit que 10^{-6}. Justifier votre réponse.

Aufgabe / problème 7:

Untersuchen Sie Extrema der untenstehende Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Verfahrens von Newton. Es sind exakte Resultate anzugeben (kein Taschenrechner).

(a) Konstruieren Sie die Iterationsvorschrift (Formel) um Extremas der Funktion zu bestimmen.

(b) Wählen Sie einen geeigneten, **ganzzahligen** Startwert und wenden Sie **einen** Schritt des Verfahrens von Newton an um die Lage des Minumums approximativ zu bestimmen.

Examiner les extrema de la fonction $f(x)$ ci– dessous à l'aide de la méthode de Newton. Donner des résultat exacts (sans calculatrice).

(a) Donner la formule itérative pour trouver les extrema de cette fonction.

(b) Choisir un nombre **entier** comme valeur initiale et appliquer **un pas** de la méthode de Newton pour chercher la position du minimum.

$$f(x) = x^6 - x^4 + x - 3$$