

# Durchflussmessung mittels Corioliskraft

Andreas Stahel

Entwurf vom 2. Juni 1999

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Eigenschwingungen eines Rohres</b>	<b>1</b>
1.1	Beschreibung der statischen Situation . . . . .	1
1.2	Dynamische Beschreibung, Separation der Variablen . . . . .	3
1.2.1	Lösung der Zeitgleichung . . . . .	3
1.2.2	Lösung der Gleichung für $y(x)$ bei eingespanntem Rohr . . . . .	3
1.3	Bemerkungen . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Effekt des Durchflusses</b>	<b>6</b>
2.1	Beschreibung . . . . .	6
2.2	Berechnung der Lösung . . . . .	6
2.3	Simulationen mit <i>Mathematica</i> . . . . .	7
2.4	Messung von Phasenverschiebung als Funktion des Durchflusses . . . . .	9
2.5	Bemerkungen . . . . .	10
2.5.1	Fragen an Studenten . . . . .	10
2.5.2	Mängelliste . . . . .	10

## 1 Eigenschwingungen eines Rohres

### 1.1 Beschreibung der statischen Situation

Wir untersuchen ein elastisches Rohr in horizontaler Ruhelage. Seine Auslenkung sei beschrieben durch eine Funktion  $u(x)$  für  $0 \leq x \leq L$ .

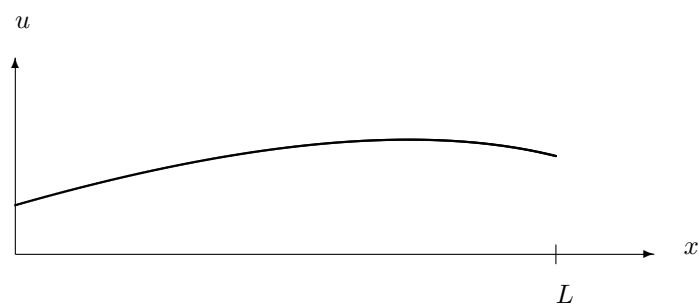


Abbildung 1: Biegung eines Rohres

Die grundlegende physikalischen Beziehungen sind

$$\begin{aligned} EI u''(x) &= M(x) \\ EI u^{(4)}(x) &= \frac{d^2}{dx^2} M(x) = f(x) \end{aligned}$$

wobei die Bedeutung der Notationen der Tabelle 1 zu entnehmen ist.

Abkürzung	Bedeutung	Einheiten
$x$	horizontale Koordinate $0 \leq x \leq L$	$m$
$y$	vertikale Auslenkung aus der Ruhelage	$m$
$L$	Länge des Rohres	$m$
$I$	Flächenträgheitsmoment	$m^4$
$E$	Elastizitätsmodul des Materials	$\frac{N}{m^2}$
$f$	vertikale Kraft pro Länge	$\frac{N}{m}$
$M$	Biegemoment	$N m$
$\rho$	gesamte Masse pro Länge	$\frac{kg}{m}$
$\rho_1$	durchfliessende Masse pro Länge	$\frac{kg}{m}$
$v_1$	Geschwindigkeit des Durchflusses	$\frac{m}{s}$

Tabelle 1: Beschreibung der physikalischen Grössen

Für eine gegebene Kraft  $f$  erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung. Diese Differentialgleichung ist zu ergänzen durch entsprechende Randbedingungen. Ist einer der Endpunkte bei  $x = 0$  so gilt dort

$$\begin{aligned}
 u(0) &= 0 && \text{keine Auslenkung} \\
 u'(0) &= 0 && \text{horizontal eingespannt} \\
 u''(0) &= 0 && \text{kein wirkendes Moment} \\
 u'''(0) &= 0 && \text{keine vertikale Kraft}
 \end{aligned}$$

Ist ein Balken auf beiden Seiten fest eingespannt, so erhalten wir ein Randwertproblem vierter Ordnung.

$$\begin{aligned}
 EI u^{(4)}(x) &= \frac{d^2}{dx^2} M(x) = f(x) \\
 u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) &= 0
 \end{aligned}$$

Als Beispiel setzen wir  $L = 3$  und  $f(x) = 5$  und erhalten mit *Mathematica* die Lösung in Abbildung 2.

```

Mathematica
<<~/mathematica/bvp/Chasing.m
(* a package to solve boundary value problems *)
Clear[EI,f,L,u]
EI=1;
f[x_]=5;
L=3;
un[x_]= u[x]/.
Chasing[{EI*D[u[x],{x,4}]==f[x],u[0]==0,u'[0]==0,u[L]==0,u'[L]==0},u[x],{x,0,L}];
Plot[un[x],{x,0,L},AspectRatio->Automatic];

```

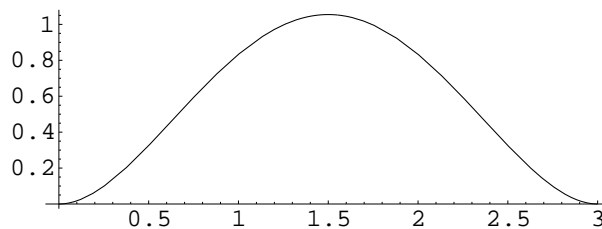


Abbildung 2: Ein unter konstanter Last gebogener Balken

## 1.2 Dynamische Beschreibung, Separation der Variablen

Nun gehen wir davon aus, dass die vertikale Auslenkung  $u(t, x)$  sowohl von der Zeit  $t$  als auch vom Ort  $x$  abhängt. Für ein statisches Rohr wurde die auf einen Abschnitt der Länge  $\Delta x$  wirkende Kraft im vorangehenden Abschnitt bestimmt. Das Rohr muss somit eine gleich grosse Kraft aufbringen, bewirkt durch die Durchbiegung. Wirkt auf das Rohr keine externe Kraft, so wird das Rohr durch diese Biegekräfte vertikal beschleunigt. Die zu beschleunigende Masse ist  $\rho \Delta x$ . Dies kann in die Gleichung von Newton eingesetzt werden und man erhält.

$$\rho \ddot{u}(t, x) = -EI u^{(4)}(t, x)$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung.

Um Lösungen dieser Gleichung zu finden machen wir einen Separationsansatz

$$u(t, x) = T(t) \cdot y(x)$$

d.h. wir nehmen an, dass die Auslenkung als Produkt einer zeitabhängigen Funktion  $T(t)$  mit einer ortsabhängigen Funktion  $y(x)$  geschrieben werden kann. Dieser Ansatz wird in die Differentialgleichung eingesetzt und wir erhalten

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (T(t) \cdot y(x)) &= -EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} (T(t) \cdot y(x)) \\ \rho y(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) &= -EI T(t) \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) &= -\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x) \end{aligned}$$

- Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von  $t$  ab, somit kann die rechte Seite auch nur von  $t$  abhängig sein.
- Die rechte Seite dieser Gleichung hängt nur von  $x$  ab, somit kann die linke Seite auch nur von  $x$  abhängig sein.
- Zusammenfassend müssen beide Seiten je konstant sein. Wir nennen diese Konstante  $-\omega^2$ , ein technisches Problem ignorierend<sup>1</sup>.

Somit erhalten wir eine Zeitgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) = -\omega^2 T(t)$$

und eine Gleichung für  $y(x)$

$$\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x) = \omega^2 y(x)$$

### 1.2.1 Lösung der Zeitgleichung

Die allgemeine (komplexe) Lösung der Zeitgleichung ist gegeben durch

$$T(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

Alle reelle Lösungen erhält man die linear unabhängigen Funktionen  $\cos(\omega t)$  und  $\sin(\omega t)$ .

### 1.2.2 Lösung der Gleichung für $y(x)$ bei eingespanntem Rohr

Mit

$$k^4 = \frac{\rho}{EI} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt[4]{\frac{\rho}{EI}}$$

erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d^4}{dx^4} y(x) = \omega^2 k^4 y(x)$$

---

<sup>1</sup>Mit der Formulierung  $-\omega^2$  wird stillschweigend angenommen, dass diese Konstante negativ ist. Diese Annahme kann gerechtfertigt werden, was wir hier unterlassen.

d.h. wir suchen Funktionen deren vierte Ableitung gleich der Funktion ist, bis auf einen konstanten Faktor. Eine Form der allgemeinen Lösung ist

$$y(x) = A \cos(k\sqrt{\omega} x) + B \cosh(k\sqrt{\omega} x) + C \sin(k\sqrt{\omega} x) + D \sinh(k\sqrt{\omega} x)$$

Nun können wir Randbedingungen verwenden um mögliche Werte für die Konstanten  $A, B, C$  und  $D$  zu finden. Aus den Einspannbedingungen bei  $x = 0$  folgt

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 &\implies & A + B = 0 \\ y'(0) &= 0 &\implies & k\sqrt{\omega} C + k\sqrt{\omega} D = 0 \end{aligned}$$

Somit vereinfacht sich die allgemeine Lösung zu

$$y(x) = A (\cos(k\sqrt{\omega} x) - \cosh(k\sqrt{\omega} x)) + C (\sin(k\sqrt{\omega} x) - \sinh(k\sqrt{\omega} x))$$

Nun sind die beiden Bedingungen  $y(L) = 0$  und  $y'(L) = 0$  einzusetzen. Das führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} A (\cos(k\sqrt{\omega} L) - \cosh(k\sqrt{\omega} L)) + C (\sin(k\sqrt{\omega} L) - \sinh(k\sqrt{\omega} L)) &= 0 \\ A (-\sin(k\sqrt{\omega} L) - \sinh(k\sqrt{\omega} L)) + C (\cos(k\sqrt{\omega} L) - \cosh(k\sqrt{\omega} L)) &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares, homogenes Gleichungssystem für die beiden Unbekannten  $A$  und  $C$ . Ist die Determinante der entsprechenden Matrix nicht Null, so ergibt sich nur die triviale Lösung  $A = C = 0$  und somit  $y(x) = 0$ . An dieser Lösung sind wir nicht interessiert.

Somit interessieren uns nur die Werte von  $\omega$  für die

$$(\cos(k\sqrt{\omega} L) - \cosh(k\sqrt{\omega} L))^2 + \sin^2(k\sqrt{\omega} L) - \sinh^2(k\sqrt{\omega} L) = 0$$

Wegen  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$  und  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$  kann diese Gleichung umgeschrieben werden zu

$$2 - 2 \cos(k\sqrt{\omega} L) \cdot \cosh(k\sqrt{\omega} L) = 0$$

Nun untersuchen wir die Hilfsfunktion

$$g(z) = 1 - \cos(z) \cdot \cosh(z) = 0$$

Mittels einer Graphik und *Mathematica* können wir einige Nullstellen dieser Funktion bestimmen. Eine exakte Lösung ist nicht möglich. Da die  $\cosh$ -Funktion für  $z \gg 1$  sehr grosse Werte annimmt, muss  $\cos z$  nahezu Null sein, damit das Produkt 1 ergibt. Somit müssen die Lösungen in der Nähe der Nullstellen der  $\cos$ -Funktion liegen. Diese Information hilft dem *Mathematica*-Befehl `FindRoot[]` die Nullstellen mit Hilfe des Verfahrens von Newton zu bestimmen.

#### Mathematica

```
g[z_]:= 1-Cos[z]*Cosh[z];
Plot[g[z],{z,0,20},PlotRange->{-1,1}];
roots=Table[z/.FindRoot[g[z]==0,{z,Pi/2+k*Pi}],{k,1,6}]
{4.73004,7.8532,10.9956,14.1372,17.2788,20.4204}
```

Wegen

$$z_n = k \sqrt{\omega_n} L \quad \implies \quad \omega_n = \left(\frac{z_n}{k L}\right)^2$$

gibt es nur für eine diskrete Menge von Werten der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  von Null verschiedene Lösungen  $y_n$  der Differentialgleichung. Die möglichen Werte für  $A$  und  $C$  sind dann bestimmt durch

$$A (\cos z_n - \cosh z_n) + C (\sin z_n - \sinh z_n) = 0$$

oder

$$A = -C \frac{\sin z_n - \sinh z_n}{\cos z_n - \cosh z_n}$$

Man erhält

$$y_n(x) = C \frac{\sin z_n - \sinh z_n}{\cos z_n - \cosh z_n} \left( \cos\left(z_n \frac{x}{L}\right) - \cosh\left(z_n \frac{x}{L}\right) \right) + C \left( \sin\left(z_n \frac{x}{L}\right) - \sinh\left(z_n \frac{x}{L}\right) \right)$$

wobei die Konstante  $C$  frei wählbar ist. Diese Funktion kann nun für verschieden Werte von  $n \in \mathbb{N}$  mit *Mathematica* berechnet werden.

### Mathematica

```
n=1;
L=3;
k=1;
z[n_] := roots[[n]];
A[n_] := -C*(Sin[z[n]] - Sinh[z[n]]) / (Cos[z[n]] - Cosh[z[n]]);
f[x_] := A[n]*(Cos[z[n]*x/L] - Cosh[z[n]*x/L]) + C*(Sin[z[n]*x/L] - Sinh[z[n]*x/L]);
Plot[f[x]/.C->1,{x,0,L}];
```

Eine zeitabhängige, periodische Lösung der ursprünglichen Gleichung ist nun gegeben durch

$$u_n(t, y) = \cos(\omega_n t) \cdot y_n(x)$$

Ein mögliches Resultat (zweite Eigenschwingung) ist in Abbildung 3 gezeigt. Mit *Mathematica* kann auch eine Animation erzeugt werden.

### Mathematica

```
n=2;
g2=Plot3D[f[x]*Cos[(z[n]/(k*L))^2*t]/.C->1,{t,0,2.5},{x,0,L},
AxesLabel->{"Zeit","Ort","u"},PlotPoints->40];
```

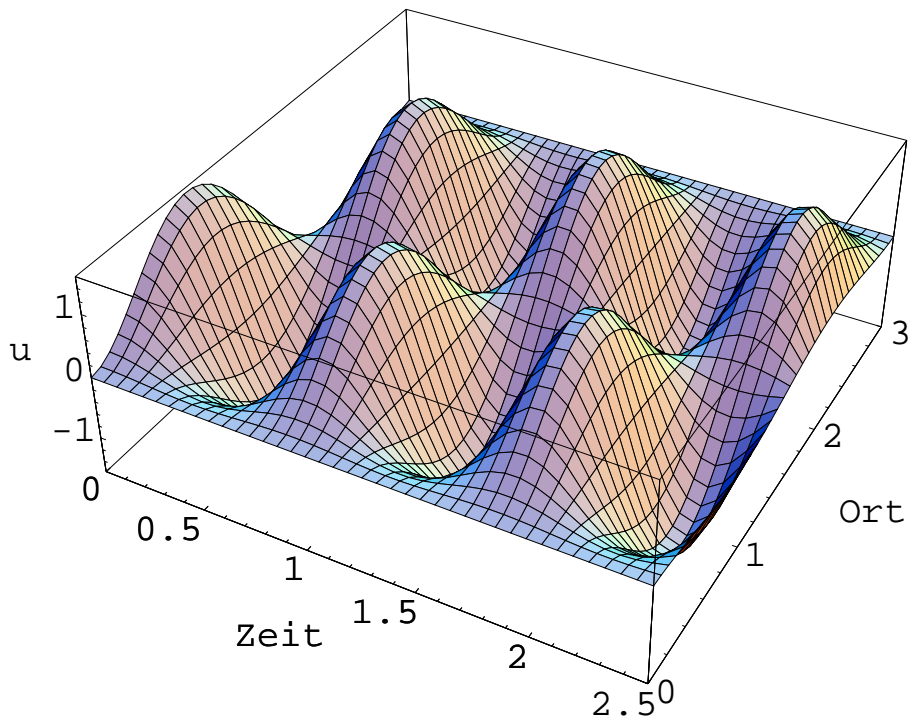


Abbildung 3: Ein schwingendes Rohr

### 1.3 Bemerkungen

Im vorangehenden Abschnitt wurde eine Lösung eines beidseitig fest eingespannten Rohres gesucht. Andere Konfigurationen können mit den selben Methoden untersucht werden. Eine andere Wahl von Randbedingungen wird auf andere Werte  $\omega_n$  der vorkommenden Frequenzen führen.

## 2 Effekt des Durchflusses

### 2.1 Beschreibung

Das Rohr wird durch eine externe Kraft so angeregt, dass sich die erste Eigenschwingung ausbildet, falls kein Gas/Flüssigkeit durch das Rohr fließt. Diese Lösung ist gegeben durch

$$u_1(t, y) = \cos(\omega_1 t) \cdot y_1(x)$$

Für kleine Durchflussgeschwindigkeiten wird die Lösung nicht erheblich von der obigen abweichen. Wir suchen nur Lösungen mit der selben Periode.

### 2.2 Berechnung der Lösung

Nun nehmen wir an, dass ein Gas oder eine Flüssigkeit durch das Rohr fließt mit einer konstanten horizontalen Geschwindigkeit  $v_1$ . Die Transversalkomponente des Impulses auf einen Stück der Länge  $\Delta x$  ist gegeben durch

$$(\rho \dot{u}(t, x) + \rho_1 v_1 u'(t, x)) \Delta x$$

Da die vertikale Kraft der Änderungsrate des Impulses entspricht erhalten wir die modifizierte Gleichung

$$\rho \ddot{u}(t, x) + \rho_1 v_1 \dot{u}'(t, x) = -EI u^{(4)}(t, x)$$

Diese partielle Differentialgleichung könnte nun numerisch gelöst werden, der Aufwand ist erheblich.

Als Lösungsansatz versuchen wir wiederum einen Separationsansatz

$$u(t, x) = T(t) \cdot y(x)$$

der zu den folgenden Rechnungen führt.

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (T(t) \cdot y(x)) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (T(t) \cdot y(x)) &= -EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} (T(t) \cdot y(x)) \\ \rho y(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} y(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(t) &= -EI T(t) \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nicht separierbar.

Da das System extern abgeregt wird, ist die zu erwartende Periode (resp.  $\omega$ ) bereits bekannt und wir verwenden als Ansatz eine Funktion

$$T(t) = e^{i\omega t}$$

resp. den Realteil dieser Funktion. Somit erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Ortsfunktion  $y(x)$

$$-\omega^2 \rho y(x) + i\omega \rho_1 v_1 y'(x) + EI y^{(4)}(x) = 0$$

mit passenden Randbedingungen. Mit den Notationen

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho}{EI}} \quad \text{und} \quad p = \frac{\rho_1}{EI} v_1$$

wird daraus

$$y^{(4)}(x) + i\omega p y'(x) - \omega^2 k^4 y(x) = 0$$

- Für  $p = 0$  (d.h.  $v_1 = 0$ ) ergibt sich wieder die Eigenwertgleichung des vorangehenden Abschnitts. Deshalb ist die Gleichung nicht eindeutig lösbar, alle Vielfachen der Eigenfunktion sind Lösungen der Differentialgleichung.
- Für  $p > 0$  erhalten wir eine komplexe Differentialgleichung vierter Ordnung. Die physikalisch relevante Lösung wird sich als Realteil von  $e^{i\omega t} y(x)$  ergeben.
- Setzt man

$$y(x) = |y(x)| \cdot e^{i\delta(x)}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \operatorname{Re} \left( |y(x)| \cdot e^{i(\omega t + \delta(x))} \right) \\ &= |y(x)| \cdot \cos(\omega t + \delta(x)) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich eine ortsabhängige Phasenverschiebung  $\delta(x)$ , die gemessen werden kann. Daraus will man auf den Massendurchfluss schliessen.

Nun machen wir den Ansatz

$$y(x) = y_1(x) + w(x)$$

und setzen in die Differentialgleichung ein. Man erhält

$$y_1^{(4)}(x) + w^{(4)}(x) + i\omega_1 p(y_1'(x) + w'(x)) - \omega_1^2 k^4 (y_1(x) + w(x)) = 0$$

In dieser Gleichung kann  $y_1$  rechts isoliert werden und die Gleichung

$$y_1^{(4)}(x) = \omega_1^2 k^4 y_1(x)$$

verwendet werden. Das führt auf

$$\begin{aligned} w^{(4)}(x) + i\omega_1 p w'(x) - \omega_1^2 k^4 w(x) &= -y_1^{(4)}(x) + w^{(4)}(x) - i\omega_1 p y_1'(x) + \omega_1^2 k^4 y_1(x) \\ &= -i\omega_1 p y_1'(x) \end{aligned}$$

Diese vom Parameter  $p$  abhängige Gleichung für die unbekannte Funktion  $w(x)$  kann ergänzt werden durch die Randbedingungen

$$w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0$$

Für gegebene Werte von  $k$ ,  $\omega_1$ ,  $L$  und  $p$  kann eine numerische Lösung relativ leicht bestimmt werden. Die Lösung wird komplex sein. Die  $x$ -abhängige Phasenverschiebung ergibt sich nun durch

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \arg(y_1(x) + w(x)) \\ \tan(\delta(x)) &= \frac{\operatorname{Im} w(x)}{y_1(x) + \operatorname{Re} w(x)} \end{aligned}$$

Die Funktion  $w(x)$  hängt linear von der Funktion  $y_1(x)$  ab, deshalb wird die Phasenverschiebung  $\delta(x)$  unabhängig sein von der Amplitude von  $y_1(x)$ . Dies ist für eine zuverlässige Messung des Massendurchflusses wesentlich.

## 2.3 Simulationen mit *Mathematica*

Die obigen Rechnungen werden mit *Mathematica* ausgeführt. Zuerst wird das Package `Chasing.m` geladen, um Randwertprobleme zu lösen, und die Nullstellen für die Eigenwertberechnung wird ausgeführt.

————— **Mathematica** —————

```
<<~/mathematica/bvp/Chasing.m
g[z_]:= 1-Cos[z]*Cosh[z];
Plot[g[z],{z,0,20},PlotRange->{-1,1}];
roots=Table[z/.FindRoot[g[z]==0,{z,Pi/2+k*Pi}],{k,1,6}];
```

Die Daten werden eingegeben und ein Plot der Amplitude der ersten Eigenschwingung erzeugt.

————— **Mathematica** —————

```
n=1;
L=3;
k=1;
z[n_]:= roots[[n]];
A[n_]:= -(Sin[z[n]]-Sinh[z[n]])/(Cos[z[n]]-Cosh[z[n]]);
y1[x]= A[1]*(Cos[z[n]*x/L]-Cosh[z[n]*x/L]) + (Sin[z[n]*x/L]-Sinh[z[n]*x/L]);
omega1=(z[1]/(k*L))^2;
Plot[y1[x],{x,0,L}];
```

Nun wird die Funktion  $w(x)$  numerisch berechnet und die Abbildung 4 erzeugt. Es kann abgelesen werden, dass der Imaginärteil vom  $w(x)$  in der linken Hälfte des Rohres negativ ist, d.h. man wird dort eine negative Phasenverschiebung gegenüber der Grundschwingung feststellen. Rechts ergibt sich eine positive Phasenverschiebung.

————— **Mathematica** —————

```

p=5;
wn[x_]=w[x]/. First [
  Chasing[ {w''''[x] +I*omega1* w'''[x] - k^4*omega1^2* w[x]==
    -I*omega1*p*y1'[x], w[0]==0, w'[0]==0, w[L]==0, w'[L]==0},
  w[x], {x, 0, L}]];
Plot [Im[wn[x]], {x, 0, L}];

```

Ein Plot der zu messenden Phasenverschiebung ist in Abbildung 5 gezeigt.

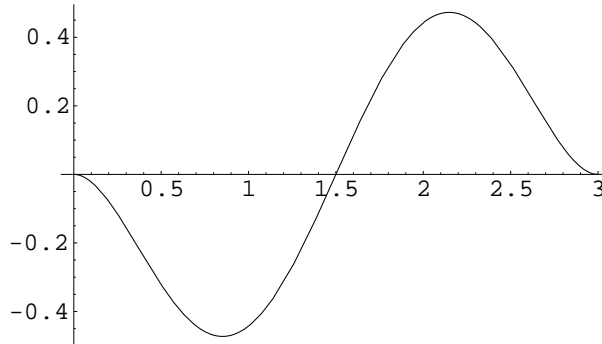


Abbildung 4: Graph des Imaginärteils der Funktion  $w(x)$

#### Mathematica

```
Plot [Arg [y1 [x]+wn[x]], {x, 0, L}];
```

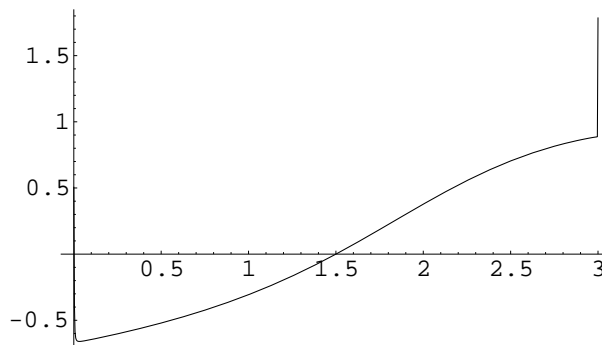


Abbildung 5: Phasenverschiebung des Rohres mit Durchfluss

Ein Plot des Verhaltens des Rohres kann nun leicht erzeugt werden und führt auf Abbildung 6. Die Phasenverschiebung ist nur schwer zu erkennen. Ein Schnitt zu einem fixen Zeitpunkt (z.B.  $t = 2.0$ ) zeigt die Asymmetrie sehr deutlich.

#### Mathematica

```
Plot3D [Re [(y1 [x]+wn[x])*Exp [I*omega1*t]], {t, 0, 5}, {x, 0, L},
AxesLabel->{"Zeit", "Ort", "u"},
PlotPoints -> 40];
```

#### Mathematica

```
Plot [Re [(y1 [x]+1*wn[x])*Exp [I*omega1*2.0]], {x, 0, L},
PlotRange ->{-2,2}];
```

Eine Animation mit 50 Zeitschritten, verteilt über eine Periode lässt den Effekt sehr deutlich zutage treten.

#### Mathematica

```
Animate [Plot [Re [(y1 [x]+1*wn[x])*Exp [I*omega1*t]], {x, 0, L},
PlotRange ->{-2,2}], {t, 0, 2*Pi/omega1, 2*Pi/omega1/50}];
```



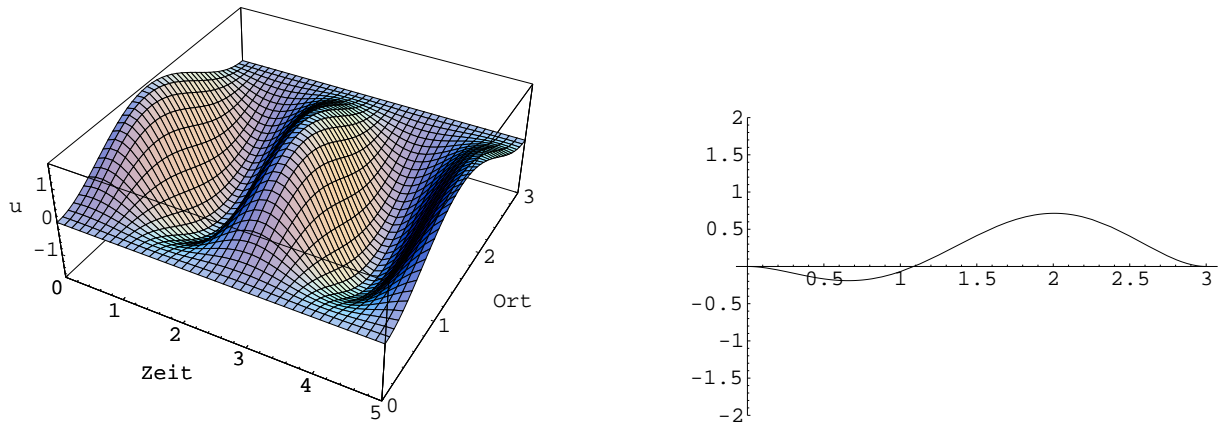


Abbildung 6: Schwingverhalten des Rohres mit Durchfluss

## 2.4 Messung von Phasenverschiebung als Funktion des Durchflusses

Der obige Code erlaubt es uns nun die Phasenverschiebung an zwei Stellen des schwingenden Rohres als Funktion des Parameters  $p$  zu berechnen. Als Beispiel berechnen wir die Phasenverschiebung zwischen den Auslenkungen bei einem und zwei Dritteln der Rohrlänge.

### Mathematica

```
phasenverschiebung[p_] := Module[{} ,
  wn[x_] = w[x] /. First[ Chasing[ {w''''[x] + I*omega* w''[x] - k^4*omega^2* w[x] ==
    -I*omega*p*y1'[x], w[0] == 0, w'[0] == 0, w[L] == 0, w'[L] == 0},
    w[x], {x, 0, L}]];
  Arg[y1[2*L/3] + wn[2*L/3]] - Arg[y1[L/3] + wn[L/3]]]
```

### Mathematica

```
res = Table[{p, phasenverschiebung[p]}, {p, 0.01, 40, 1}];
ListPlot[res, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"Fluss", "Phase"}];
```

Der *Mathematica*-Code erzeugt Abbildung 7. Es ist gut ersichtlich, dass für kleine Phasenverschiebungen (und somit kleine Durchflussmengen) die Beziehung nahezu linear ist. Die Graphik zeigt einen sehr grossen Bereich der Phasenverschiebung.

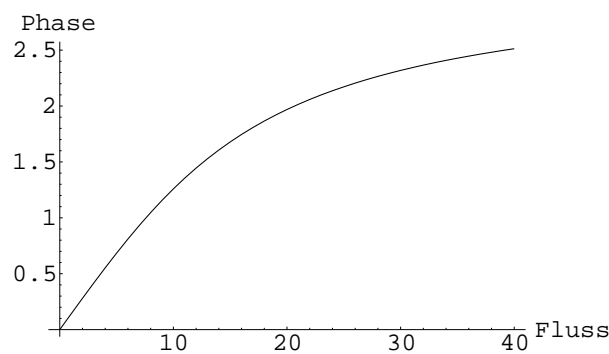


Abbildung 7: Phasenverschiebung als Funktion des Durchflusses

## 2.5 Bemerkungen

### 2.5.1 Fragen an Studenten

- Untersuchen Sie ein Titanrohr, Aussendurchmesser 3 cm, Länge 30 cm. Die Grundfrequenz der leeren, eingespannten Rohres ist 1 kHz. Zu bestimmen ist die Wandstärke.
- Wie verändert sich die Grundfrequenz aufgrund einer eingefüllten, ruhenden Flüssigkeit? Verifizieren Sie, dass die Dichte der Flüssigkeit aus der Grundfrequenz bestimmt werden kann.
- Wo sind die Sensoren zu plazieren? (Mit Begründung)
- Welche Massendurchflüsse können gemessen werden?
- Versuchen Sie die physikalischen Phänomene zu erklären und zu illustrieren, idealerweise durch eine Animation.

### 2.5.2 Mängelliste

- Die Art der Anregung und Änderungen der Frequenz aufgrund des durchfliessenden Materials wurden ignoriert.
- Wir haben nur eine mögliche Lösung gefunden. Es gibt andere Lösungen. Dämpfungseffekte werden entscheiden, welche Lösung sich bei einem realen Aufbau einstellt. Dies ist hier vollständig ignoriert.
- Es werden nur Bewegungen mit der Frequenz der Grundschiwingung untersucht. Oberschwingungen können aber durchaus eine Rolle spielen.
- Vollständige numerische Simulation wäre durchaus interessant, mit der Berücksichtigung von möglichst vielen physikalischen Einflüssen.
- Die Struktur des Rohrs wurde als homogen angenommen. Dies ist bei einer Realisierung sicher nicht der Fall, da einige Zusatzgeräte angebracht werden müssen.