Algèbre linéaire et Géométrie, 1

Andreas Stahel

18 décembre 2007

Table des matières

Chapitre 1

Nombres et démonstration

Le but de ce chapitre est d'introduire quelques concepts mathématiques et une bonne idée d'un preuve. Vous ne devez pas trouver des nouveaux résultats et plutôt concentrer sur les nouveaux notions et structures. Dans ce chapitre on doit savoir les mots de clés élément, ensemble, ensemble vide, union, intersection et complément. On travaille avec des diagrammes de Venn.

1.1 définition, assomption, résultat, preuve

Dans cette section quelques notions sont fixées et illustrées avec des exemples. Les explications viens des livres [Solo90] et [Schw75].

1–1 Définition : En mathématique une **définition** est un accord sur la signification d'un terme. Les définition ne sont pas fait par hasard. Habituellement ils sont motivées par des expressions ou structures qu'on retrouve souvent. Une définition peut aussi servir comme abréviation pour une expression compliqué.

Voilà quelques examples simples.

1–2 Exemple :

1. Un nombre entier n est dit **diviseur** du nombre entier m, si il existe un nombre entier k tel que $m = n \cdot k$.
2. Un nombre $p > 1$ entier, positive est dit **nombre premier** si 1 et p sont les seuls diviseur.
3. Un triangle est dit **triangle isocèle** si deux côtés sont de la même longueur.
4. Un nombre entier est dit **nombre pair** si 2 est un diviseur du nombre.
5. Un nombre q est dit **nombre rationnel** si il peut être écrit dans la forme $q = \frac{a}{b}$, avec des nombres entiers a et a.
6. On dit que une proposition A **implique** la proposition B ($A \Longrightarrow B$), si B est vrai sous condition que A est vrai. Ils n'est pas possible arriver à B faux et A vrai.
7. On dit que les propositions A et B sont équivalentes si A implique B et B implique A. Veut dire $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$.
8. La proposition A **et** B ($A \wedge B$) est vrai si, et seulement si A est vrai et B est vrai.
9. La proposition A **ou** B ($A \vee B$) et vrai si, et seulement si une (ou les deux) proposition de A et B sont vrai.

$\diamondsuit$

1–3 Définition : Un **résultat** mathématique est une proposition vrai. Souvent on doit vérifier que un résultat est juste, veut dire on va **prouver** le résultat. Un résultat important est dit **théorème**. Des fois une démonstration d'un théorème est longe et compliquée, donc on la divise en plusieurs parties simples. Un tel résultat partielle est dit **lemme**. Il existe aussi des résultat fondamentale qui sont vrai par définition. On ne peut pas les prouver. Un tel résultat est dit **axiom**.

1–4 Exemple : Le résultat suivant est un axiom.
Pour chaque nombre naturel n il existe un prochain nombre, dit $n + 1$. ♢

On dit que Euclid a trouvé un **schéma de démonstration** très utile. Des fois les enseignants insiste trop sur ce schéma et donc il n'est pas très populaire. Mais c'est une bonne aide pour organiser une démonstration. Nous allons baser nos démonstrations sur le schéma de Euclid, sans toujours insister sur tout les détails.

Euclid utilisait sa structure suivante:

(a) **prémisse**

(b) **affirmation**

(c) **démonstration**

Le fin d'une démonstration est indiqué par le symbole $\square$. La seule partie qui nous demande de „travailler“ est la troisième. Donc les deux premier ne sont pas tellement important. Mais l'expérience montre qu'il est préférable de formuler la prémisse et l'affirmation pour clarifier le travail a faire dans la démonstration.

Voilà quelques exemples comme illustration.

1–5 Résultat : *Pour chaque nombre pair n le nombre n^2 est aussi pair.*

Démonstration :

(a) **prémisse**: n est un nombre pair.

(b) **affirmation**: n^2 est un nombre pair.

(c) **démonstration**: A cause de la prémisse n est de la forme $n = 2 \cdot m$ pour un nombre entier m. Donc on a
$$n^2 = n \cdot n = (2 \cdot m) \cdot (2 \cdot m) = 4 \cdot m^2$$

Le nombre $2 \cdot m^2 = M$ est entier et donc n^2 est de la forme $2 \cdot M$ est donc n^2 est pair. $\square$

1–6 Théorème : *(théorème de Pythagoras)*
Dans un triangle droit avec longueurs des côtés a, b et c on sait que $a^2 + b^2 = c^2$. La longueur de la hypoténuse est c.

Démonstration :

(a) **prémisse**: géométrie élémentaire et un triangle droit ABC, dont la côte c est opposée de l'angle droit.

(b) **affirmation**: $a^2 + b^2 = c^2$

(c) **démonstration**: regardons la figure 1.1. On peut boucher les quatre triangle du carré à gauche dans le carré à droit, sans changer l'aire. Donc les aires supplémentaires dans les deux carrés sont les mêmes. C'est le résultat à vérifier.

$\square$

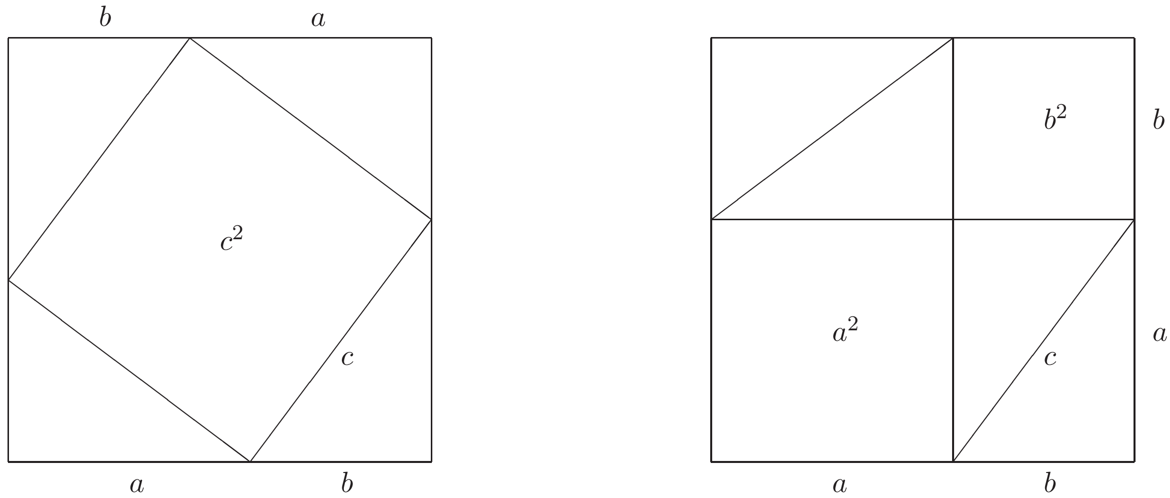


Figure 1.1: démonstration géométrique du théorème de Pythagore

Il y a des techniques différentes de démonstration à utiliser souvent.

- **démonstration directe** ou **démonstration constructive**
  Avec les prémisses on construit (calcule) l'affirmation, avec des arguments correctes. Cette façon de preuve peut être représenter par la graphique

  $$\text{prémisse} \quad \Longrightarrow A \Longrightarrow B \Longrightarrow C \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow P \Longrightarrow R \Longrightarrow \quad \text{affirmation}$$

  Des fois il est avantageux de travailler des deux côtés. Finalement on est obliger de vérifier la chaîne des implications. Les deux exemples dessus sont des démonstration directes. La preuve du théorème de Euclid (voir page 7: Il y a un nombre infinie de nombre premier) peut être donnée par une construction.

- **démonstration indirecte** ou **démonstration par contradiction**
  Avec la prémisse A on doit vérifer le résultat B, donc on regarde l'implication

  $$A \Longrightarrow B$$

  Au lieu de ça on vérifie

  $$\text{non } B \Longrightarrow \text{non } A$$

  Cette implication est équivalent l'implication originale. La méthode est illustrée par l'exemple simple ci–dessous.

  1. prémisse A: il pleut.
  2. affirmation B: la route est mouillée
  3. L'implication

     $$A \Longrightarrow B$$

     correspond à la phrase

     Si il pleut, la route est mouillée

     La deuxième implication

     $$\text{non } B \Longrightarrow \text{non } A$$

     corresponde à la phrase

     Si la route n'est pas mouillée, il ne pleut pas.

     Il est „évident“ que ces deux phrases sont équivalent. Les démonstrations par contradiction se base sur cette idée.

Le théorème de Euclid (page 7) est vérifier par une démonstration par contradiction. On suppose que le contraire de l'affirmation est vrai. Puis avec des argument correctes est des calculation on arrive à un résultat qui est faux, une contradiction. Donc la supposition dit être faux est le résultat originale est vrai. La démonstration que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel est donnée par contradiction.

- **démonstration par récurrence**
  Cette méthode de démonstration est présentée dans la section 1.4. La méthode est ni plus importante que plus difficile que les autres, mail habituellement les étudiants doivent travailler un peu plus dur pour la maîtriser.

- **démonstration d'unicité**
  ce n'est pas une méthode de preuve mail plutôt un résultat typique. Souvent on cherche des solutions d'un problème et on trouve une solution. Puis on se demande s'il y a des autres solutions. On essaye de prouver qu'il n'y a pas d'autres solutions. Comme exemple étudier l'algorithme de Euclid ci–dessous.

1–7 Résultat : *(algorithme de Euclid)*
Soit a et b deux nombres entiers, positive. Puis l'algorithme suivante donne le diviseur commun le plus grand possible t de ces deux nombres. Ce diviseur est unique. Examiner le schéma ci–dessous.

$$\begin{aligned}
a &= q_1\, b + r_1 && \textit{avec } r_1 \neq 0 \textit{ et } r_1 < b \\
b &= q_2\, r_1 + r_2 && \textit{avec } r_2 \neq 0 \textit{ et } r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3\, r_2 + r_3 && \textit{avec } r_3 \neq 0 \textit{ et } r_3 < r_2 \\
r_2 &= q_4\, r_3 + r_4 && \textit{avec } r_4 \neq 0 \textit{ et } r_4 < r_3 \\
& \vdots \\
r_{n-2} &= q_n\, r_{n-1} + r_n && \textit{avec } r_n \neq 0 \textit{ et } r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= \quad q_{n+1}\, r_n + 0
\end{aligned}$$

Puis $t = r_n$ est le diviseur commun le plus grand possible de a et b. Dans cette schéma tous les nombres sont positive.

Dans les calculations ci–dessus on a utilisé un résultat sur la division de deux nombres positive. Ici nous donnons pas la démonstration de ce résultat.

1–8 Lemme : *Soit a et b deux nombres entiers, strictement positive. Puis il existe deux nombres unique entier, tel que*

$$a = b \cdot q + r \quad \textit{avec} \quad 0 \leq r < b$$

Démonstration : (de l'algorithme de Euclid)
A cause de l'inégalité $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n > 0$ l'algorithme termine après moins que r_1 pas. Diviser la démonstration en multiples étapes.

1. Vérifier que t est un diviseur de a et b.
   Commençons dans la dernière ligne. Il est évident que t est un diviseur de r_{n-1}. A cause de l'avant-dernière ligne t divise r_{n-2} aussi. En travaillent de bas en haut on arrive finalement à la conclusion que t divise a et b.

2. Vérifier qu'il n'y a pas de diviseur plus grand.
   Soit $s \geq t$ un autre diviseur de a et b. Donc (première ligne) s divise r_1. A cause de la deuxime ligne s est un diviseur de r_2. Répéter le schéma de haut en bas pour arriver la conclusion, que s est un diviseur de $r_n = t$. Donc on a $s = t$.

3. démonstration unicité
   Soit u un autre diviseur commun le plus grand possible. Puis on trouve une des trois situations suivantes:
   (a) $u < t$, puis u n'est pas le diviseur commun **le plus grand possible**.
   (b) $u > t$, puis u n'est pas un diviseur **commun** de a et b (voir pas 2 de la démonstration).
   (c) $u = t$ est donc le seul cas possible.

   Donc t est le **p**lus **g**rand **c**ommun **d**iviseur, bref le **pgcd**.

$\square$

1–9 Exemple : Chercher le pgdc de 693 et 147.

$$\begin{aligned}
147 &= 0 \cdot 693 + 147 \\
693 &= 4 \cdot 147 + 105 \\
147 &= 1 \cdot 105 + 42 \\
105 &= 2 \cdot \ \ 42 + 21 \\
42 &= 2 \cdot \ \ 21 + 0
\end{aligned}$$

Le pgcd de 693 et 147 est 21. $\diamondsuit$

1.2 systèmes des nombres

En mathématique on travaille souvent avec des nombres et il y a des types différentes. Tous le types (sauf $\mathbb{C}$) peuvent être illustré sur un **axe de coordonnées**.

1–10 Définition :

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ nombres naturelles
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$ nombres entiers
- $\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}$ avec $\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\}$ nobres rationnels
- $\mathbb{R}$ nombres réels
- $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ nombres irrationnels
- $\mathbb{C}$ nombres complexes

1–11 Résultat : *On a* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *et tous ces sous-ensembles sont des sous-ensembles strictes, veut dire il y a des nombres rationnels qui ne sont pas des nombres réels.*

Il est facile de trouver des exemples pour ce résultat.

1–12 Définition : Un ensemble A de nombres est dit **fermé** sous une opération, si l'application de cette opération produit toujours des résultats dans l'ensemble A.

1–13 Exemple :

- Les nombres naturelles $\mathbb{N}$ sont fermés sous l'opération addition.
- Les nombres naturelles $\mathbb{N}$ ne sont pas fermés sous l'opération soustraction.
- Les nombres naturelles $\mathbb{N}$ sont fermés sous l'opération multiplication.
- Les nombres naturelles $\mathbb{N}$ ne sont pas fermés sous l'opération division.
- Les nombres entiers $\mathbb{Z}$ sont fermés sous les opération addition, soustraction et multiplication.
- Les nombres entiers $\mathbb{Z}$ ne sont pas fermés sous l'opération division.
- Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sont fermés sous les opération addition, soustraction, multiplication et division.
- Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ ne sont pas fermés sous l'opération de calculer des racines, par exemple $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Les nombres réels $\mathbb{Q}$ sont fermés sous les opération addition, soustraction, multiplication, division et calculer des racines des nombres positive.
- Les nombres réels $\mathbb{R}$ ne sont pas fermé sous l'opération „résoudre des équation polynômials". Par exemple il existe pas de nombre réel x tel que $x^2 + 1 = 0$. Cette restriction est le raison d'être des nombres complexes $\mathbb{C}$.
- Les nombres complexes $\mathbb{C}$ sont fermés sous les opération addition, soustraction, multiplication et division. Chaque équation polynômiale en $\mathbb{C}$ a une solution en $\mathbb{C}$ (**théorème fondamentale de l'algèbre**).

$\diamondsuit$

Quelques-uns de ces résultat sont vérifiés en classe.

1.2.1 nombres rationnels et représenation décimales

1–14 Théorème : *Tout nombre rationnel s'écrit sous la forme d'une fraction décimale finie ou périodique. Réciproquement toute fraction décimale finie ou périodique se transforme en fraction de deux nombre entiers.*

Démonstration : Utiliser deux idées simples pour vérifier cette caractérisation des nombres rationnels.

division élementaire

```
214 : 7  = 30.571428571428571428571428571428...
  40
   50
    10
     30
      20
       60
        40
         50
          ..
           ..
```

Après chaque pas de cette division il reste un nombre plus petit que 7, donc seulement les restes 0,1,2,3,4,5,6 sont possibles. Après moins que 6 pas on arrive à un reste de 0 (fraction décimale finie) ou on retrouve un reste et donc la fraction devient périodique.

Un argument similaire montre que pour chaque nombre rationnel a/b on arrive à une représentation décimale finie (reste 0) ou périodique avec période plus petit que $b - 1$.

Il nous reste à vérifier que chaque fraction décimale finie ou périodique peut être écrit comme fraction de deux nombres entiers. Comme illustration regarder x donné par $27.12\overline{123}$

```
1000 x = 27121.23123123123123123...        |+
     x =    27.12123123123123123123...     |-
-------------------------------------------
 999 x = 27094.11
```

Donc on sait que $x = 2709411/99900$ et x est dans la forme d'une fraction. La même idée peut être utilisée pour des fraction décimales périodiques. $\square$

1–15 Exemple : Avec la caractérisation des nombres rationnels ci–dessus on peut aussi donné la représentation d'un nombre irrationnel.

$$0.10110111011110111110111111011111110\ldots$$

$\diamondsuit$

1–16 Théorème :

(a) *Entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.*

(b) *Entre deux nombres irrationnels il y a toujours un nombre rationnel.*

Démonstration : Avec la caractérisation ci–dessus on peut construire des tels nombres, voir problèmes 1–16 et 1–17. $\square$

1.2.2 nombres premiers

1–17 Définition : Un nombre $p > 1$ entier, positive est dit **nombre premier** si 1 et p sont les seuls diviseur.

1–18 Exemple : Voilà quelques nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, \ldots$ $\diamondsuit$

1–19 Lemme : *Chaque nombre naturel peut être écrit comme produit des nombres premiers, Cette factorisation est unique.*

1–20 Exemple : $99 = 3 * 3 * 11$ ou $99'999 = 3 * 3 * 41 * 271$ $\diamondsuit$

1–21 Théorème : *(Euclid)*
Il y a un nombre infini de nombres premiers.

Démonstration : par contradiction.
Supposition: le résultat est faux, donc il y a un nombre fini n de nombre premiers.

Donc on peut numéroter **tous** les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots p_n$ et puis calculer le nouveau nombre

$$P = \prod_{k=1}^{n} p_k$$

Calculer la factorisation en nombres premiers q_j du nombre $Q = P + 1$

$$Q = P + 1 = \prod_{j=1}^{m} q_j$$

et puis regarder q_1. La division de Q par p_k donne un reste de 1, donc q_1 ne se trouve pas dans les „vieux“ nombres premiers et on en a trouver un nouveau. Donc il y a au moins $n + 1$ nombres premiers. C'est une contradiction avec la supposition.

Donc il y a un nombre infini de nombres premiers. □

La démonstration ci–dessus contiens un algorithme pour construire des nombres premiers. Cette algorithme est très **inefficace**. Pour trouver des nombres premiers il vaut mieux d'utiliser le *crible d'Eratosthénes*. Voilà quand même une illustration.

p_1=2	a_1=2	$+1 = 3$	
p_2=3	$a_2=2 \cdot 3$	$+1 = 7$	
p_3=7	$a_3=2 \cdot 3 \cdot 7$	$+1 = 43$	
p_4=43	$a_4=2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$	$+1 = 1807$	$= 13 \cdot 139$
p_5=13	$a_5=2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13$	$+1 = 23479$	$= 53 \cdot 443$
p_6=53	$a_6=2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13 \cdot 53$	$+1 = 1244335$	$= 5 \cdot 248861$
p_7=5	....	....	....

1–22 Exemple : Il ne suffit pas de vérifier une affirmation pour quelques exemples. La formule

$$n^2 + n + 41$$

donne des nombres premiers pour $n = 1, 2, \ldots, 39$, mais il y a aussi des valeurs de n pour lesquelles on arrive à des nombres non premiers. ♢

1–23 Théorème : $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel.*

Démonstration : Démonstration par contradiction.

Supposition: $x = a/b$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $x \cdot x = 2$

Chercher la factorisation de a et b

$$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \qquad b = q_1 q_2 q_3 \ldots q_m \qquad .$$

A cause de $x \cdot x = 2$ on sait que

$$p_1 p_1 p_2 p_2 p_3 p_3 \ldots p_n p_n = 2 q_1 q_1 q_2 q_2 q_3 q_3 \ldots q_m q_m \qquad .$$

A gauche de cette signe d'égalité on trouve un nombre paire de facteurs 2, mais a droite un nombre impaire de facteurs 2. Donc on a deux factorisation différentes du même nombre. C'est une contradiction avec le lemme ci–dessus. Donc la supposition doit être faux et on sait que $\sqrt{2}$ ne peut pas être écrit comme fraction de deux nombres entiers. □

L'idée de la démonstration ci–dessus est utile pour examiner des autre nombres et décider si ils sont rationnels ou irrationnels. Voir les problèmes 1–8, 1–11, 1–9, 1–12, 1–13 et 1–14.

1.2.3 nombres réels

1–24 Définition :

- Un ensemble A de nombres est dit **majoré** s'il y a un nombre z tel que $x \leq z$ pour tout $x \in A$.
- Le nombre z s'appelle **majorant** de A.
- Un majorant z_0 de A est appelé **borne supérieur** de A ou **suprémum** si tout autre majorant z est supérieur ou égal a z_0.
- Un ensemble A de nombres est dit **minoré** s'il y a un nombre y tel que $y \leq x$ pour tout $x \in A$.
- Le nombre y s'appelle **minorant** de A.
- Un minorant y_0 de A est appelé **borne inférieur** de A ou **infimum** si tout autre minorant z est inférieur ou égal a y_0.
- L'ensemble A est dit **borné** s'il y a un majorant et un minorant.
- $A = [a, b]$ est appelle **intervalle fermé** et on a $x \in [a, b]$ si et seulement si $a \leq x \leq b$.
- $A = (a, b)$ est appelle **intervalle ouvert** et on a $x \in (a, b)$ si et seulement si $a < x < b$.

1–25 Résultat : *Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Puis on a les règles de calcul*

$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	*loi de commutativité*
$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	*loi d'assoziativité*
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	*loi de distributivité*

Il est difficile d'illustrer la différence entre les nombres rationnel (fractions des nombres entiers) et des nombres réels sur l'axe des nombres. Mais il y a des différences qui sont fondamental pour l'analyse mathématique.

1–26 Théorème : *(Axiom de borne supérieur)*
Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ (non vide) majoré possède un suprémum en $\mathbb{R}$. Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ (non vide) minoré possède un infimum en $\mathbb{R}$.

Démonstration : Il n'est pas **possible** de prouver cette propriété, cet un axiom. Cet axiom est équivalent au principe des emboîtements des intervalles (Postulat de Cantor–Dedekind). □

1–27 Exemple : L'axiom de borne supérieur est faux pour les nombres rationnels. Comme exemples regarder l'ensemble M de tous les nombres rationnels q tel que $q \cdot q < 2$. Cet ensemble est borné. Le candidat pour le suprémum est $\sqrt{2}$, qui n'est pas un nombre rationnel. Donc M n'as pas de suprémum en $\mathbb{Q}$. ♢

1–28 Définition : La **norme** (ou la **valeur absolu, le modulus**) d'un nombre réel donne la distance de 0 de ce nombre sur l'axe des nombres.

$$|a| = \begin{cases} a & : \quad a > 0 \\ -a & : \quad a < 0 \end{cases}$$

1–29 Résultat : *On peut vérifier que* ***l'inégalité triangulaire*** *est vrai.*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

1–30 Résultat : *(règles de calcul pour les inégalités)*

$$\begin{array}{ccc}
a < b & \Longrightarrow & a + c < b + c \\
a < b\ ,\ c > 0 & \Longrightarrow & ac < bc \\
a < b\ ,\ c < 0 & \Longrightarrow & ac > bc \\
0 < a < b & \Longrightarrow & \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0 \\
a < b < 0 & \Longrightarrow & 0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\
ab = 0 & \Longrightarrow & a = 0 \textit{ ou } b = 0
\end{array}$$

1.3 symbole de sommation et produit

La somme des nombres réels $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ peut être écrit comme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \qquad .$$

En général on écrit pour $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad .$$

Si $m > n$ on met

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad .$$

Avec $a_k = 1/k$ on arrive à la notation

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad .$$

Vérifier que

$$s_5 = 137/60 \qquad s_{10} = 2.928968\ldots \qquad .$$

Les calculatrices HP–48 calcule s_{10} par la commande

$$'\sum(K = 1, 10, 1/K)\,'$$

Donc la calculatrice peut vérifier que $s_{1000} = 7.485447\ldots$. Il est avantageux de ne pas faire cette calculation à la main

Dans l'exemple ci–dessus le non de la variable temporaire k en $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ n'est pas important. On a en effet

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \qquad .$$

Ce résultat peut être vérifié avec la calculatrice avec (pour $a_k = 1/k$ et $n = 7$)

$$\sum(k = 1, 7, 1/k) = \sum(j = 1, 7, 1/j) = \sum(k = 0, 6, 1/(k + 1)) \qquad .$$

Il est façile de voir que les règles suivantes sont justes

1–31 Résultat : *Considérer pour tout $k \in \mathbb{N}$ des nombres réels a_k et b_k, une constante c et des nombres entiers n, m, l, i, j tel que $m \leq n \leq l$*

(a)

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k)$$

(b)

$$\sum_{k=m}^n (c a_k) = c \sum_{k=m}^n a_k$$

(c)

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=n+1}^l a_k = \sum_{k=m}^l a_k$$

(d)

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+j}^{n+j} a_{k-j}$$

(e)

$$\sum_{k=n}^n a_k = a_n$$

Pour des sommes on a (en général)

$$\sum_{k=m}^n a_k \cdot \sum_{k=m}^n b_k \neq \sum_{k=m}^n (a_k b_k) \qquad ,$$

Vérifier ce résultat par l'exemple

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \neq (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9})$$

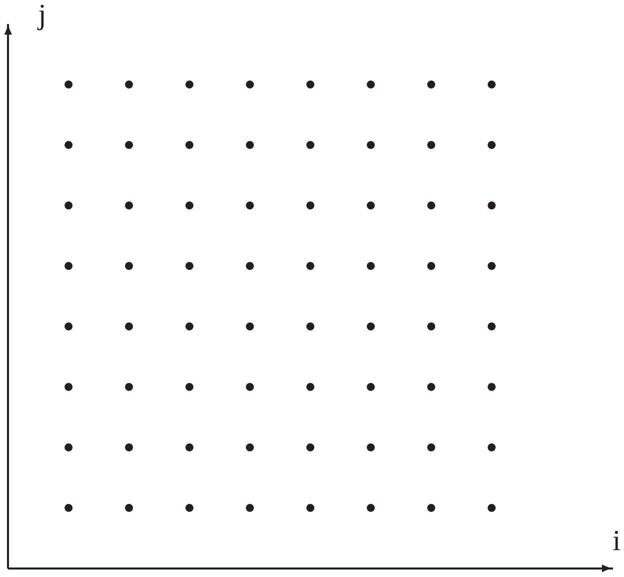


Figure 1.2: Illustration de la multiplication de deux sommes

1–32 Résultat : *Pour la multiplication de deux sommes on a*

$$(\sum_{k=m}^{n} a_k) \cdot (\sum_{k=m}^{n} b_k) = \sum_{k=m}^{n} (a_k \sum_{j=m}^{n} b_j) = \sum_{k=m}^{n} (b_k \sum_{j=m}^{n} a_j) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{j=m}^{n} (a_k b_j) \qquad .$$

Démonstration : Ce résultat est **illustré** par la figure 1.2. Le point dans la i–ième colonne et j-ième ligne correspond au terme $a_i \cdot b_j$ dans les sommes.

La somme

$$a_i \sum_{j=1}^{8} b_j$$

est calculé dans la colonne i et

$$b_j \sum_{i=1}^{8} a_i$$

dans la ligne j. L'expression

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} (a_i b_j)$$

correspond à la somme de tous les termes dans cette grille. Cette somme se calcule colonne après colons ou ligne après ligne. Donc on obtiens le formules dans de l'affirmation. □

Pour la division de deux sommes il existe **pas** de formule simple.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k / \sum_{k=m}^{n} b_k = ?$$

1–33 Exemple : Comme exercice vérifier les sommes suivantes:

$$\sum_{n=1}^{3} n^2 = 14 \qquad \sum_{n=1}^{k} 2 = 2k$$

$$\sum_{n=1}^{5} n^2 = 55 \qquad \sum_{n=1}^{k} k = k^2$$

$$\sum_{n=1}^{5} 2 = 10 \qquad \sum_{k=1}^{n} n = n^2$$

♢

1–34 Exemple : Utiliser

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

pour vérifier les résultats

(a)

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

(c)

$$\sum_{k=3}^{n+2} (k-2) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

♢

1–35 Résultat : *Pour la* ***somme géométrique*** *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

sous condition que $q \neq 1$*.*

Démonstration : Multiplication de la somme avec $(1-q)$ donne

$$(1-q)\;\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

et donc le résultat. □

1–36 Exemple : Pour un loto l'organisateur promet un prix de \$1'000'000, a payer en 20 tranches de \$50'000 au fin des 20 années a venir.

(a) Quelle somme doit l'organisateur mettre à coté aujourd'hui pour payer le prix? Calculer avec un taux d'intérêt der 5% .

(b) Quelle somme est à disposition du vainqueur au fin des 20 ans? Calculer aussi avec un taux d'intérêt de 5%

♢

Solution : Mettre $a = \$50'000$ et $q = 1.05$.

(a) Dans une année la somme de l'organisateur gagne de l'intérêt et est donc a multiplier avec le facteur q. Donc on met nettement moins que \$1'000'000 a coté.

- Pour le premier payement après une année l'organisateur doit mettre $\frac{a}{q}$ à coté.
- Pour le deuxième payement après deux année l'organisateur doit mettre $\frac{a}{q^2}$ à coté.
- Pour le troisième payement après trois année l'organisateur doit mettre $\frac{a}{q^3}$ à coté.
- Pour le payement après n année l'organisateur doit mettre $\frac{a}{q^n}$ à coté.

Avec une sommation on arrive a une somme totale s.

$$s = \sum_{n=1}^{20} \frac{a}{q^n} = \frac{a}{q} \sum_{k=0}^{19} \frac{1}{q^n} = \frac{a}{q} \frac{1-(1/q)^{20}}{1-1/q} = \frac{a\,(1-(1/q)^{20})}{q-1} \approx \$623'110.52$$

(b) Avec des observations similaires on obtien

$$\sum_{n=0}^{19} a\, q^n = a\,\frac{1-q^{20}}{1-q} \approx \$1'653'298$$

Si l'organisateur paye immédiatement la somme totale et le vainqueur et seul a profiter de l'intérêt il aurait une somme très grande à disposition après 20 années.

$$20 \cdot a\, q^{20} \approx \$2'653'298$$

□

1–37 Exemple : Considérer le nombre irrationnel

$$x = 0.101101110111101111101111110111111110\ldots$$

Avec la définition

$$a_n = -1 + \sum_{k=1}^{n} (1+k)$$

x peut être approximé par

$$x \approx \sum_{n=1}^{m} \left(10^{-a_n} \sum_{j=1}^{n} 10^{j-1} \right)$$

pour m assez grand. ♢

Démonstration : Avec *Mathematica* ce résultat est illustré par les commandes

Mathematica

```
a[n_] := Sum[1+k,{k,1,n}]-1 ;
b[n_] := Sum[10^(j-1) ,{j,1,n}];
x[m_] := Sum[(10^(-a[n])) b[n] ,{n,1,m}];
N[x[5],80]
.
0.1011011101111011111
```

□

Soit $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ des nombres réels. Puis on écrit leur produit comme

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \qquad .$$

En général on met pour $m \leq n$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \qquad .$$

Si $m > n$ on définie

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \qquad .$$

Comme exemple regarder les **factoriels**, donnés par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \qquad .$$

1–38 Exemple : Pour des nombres entiers $0 < k < n$ on définie les **coefficients binomial** par les formules

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j}$$

Pour que les règles de calcul sont plus simples on définie

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1 \quad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} := 0 \quad \text{pour} \qquad k > n$$

Comme exemple calculer

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{7!}{2!\;5!} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = \prod_{j=1}^{2} \frac{7+1-j}{j} = 21$$

Ces coefficients sont important pour les problèmes combinatoire et le triangle de Pascal (formule du binôm).

♢

1.4 démonstration par récurrence

Examiner pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une affirmation A_n. Comme exemple nous considérons

$$A_n : \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Il est façile de vérifier que A_1, A_2 et même A_{10} sont vrai. Mais il existe un nombre infinie de nombre naturels et donc on arrive pas a les examiner tout à la main. Pour prouver que A_n est vrai pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$ on utilise le **principe d'induction mathématique** ou aussi dit **raisonnement par récurrence**.

1–39 Théorème : *Soit A_n une affirmation pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et*

1. *A_1 est vrai*
2. *Si A_n est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ puis A_{n+1} doit aussi être vrai.*

Le premier point est dit ***base de l'induction****, le deuxième est dit* ***pas d'induction****. Si les deux points sont vrai on sait que A_n est vrai pou tout $n \in \mathbb{N}$.*

Cette méthode de démonstration est visualisée par des dominos.

1–40 Exemple : Pour l'exemple dessus la base de l'induction est l'affirmation

$$A_1 : \qquad \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$$

et donc vrai.

Pour vérifier le pas de l'induction utiliser la prémisse

$$A_n : \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

et vérifier la formule similaire pour A_{n+1}.

$$A_{n+1} : \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)\,(n+1+1)}{2}$$

Utiliser les règles de calculs avec des sommes pour

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= n+1+\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{2\,(n+1)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

C'est affirmation A_{n+1}, qui est donc vrai.

Le principe d'induction implique maintenant que A_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. ♢

1–41 Exemple : Pour vérifier que

$$n < 2^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

utiliser la base d'induction $1 < 2^1 = 2$. Puis Utiliser $n < 2^n$ pour vérifier

$$n+1 < 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1} \qquad ,$$

Donc le principe d'induction mathématique dit que l'inégalité est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. ♢

Il n'est pas nécessaire de toujours commencer avec $n = 1$. Utiliser une modification.

1–42 Théorème : *Soit A_n une affirmation pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$ fixe avec*

1. *A_j est vrai*
2. *Si l'affirmation A_n est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq j$ puis A_{n+1} doit aussi être vrai.*

Si les deux points sont vrai on sait que A_n est vrai pour tout $n \geq j$.

1–43 Exemple : L'affirmation $2^n > n^3$ est faux pour $n = 1, \ldots, 9$. Elle est vrai pour $n = 10$, parce que $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$. Examiner le pas d'induction pour $n \geq 10$. Utiliser

$$n^3 < 2^n$$

et calculer

$$(n+1)^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1 < 2^n + 3\,n^2 + 3\,n + 1$$

Une calculation a côté montre que pour $n \geq 10$

$$3\,n^2 + 3\,n + 1 \leq 3\,n^2 + 3\,n^2 + n^2 \leq 7\,n^2 \leq n^3 \leq 2^n$$

Combiner les deux inégalités pour arriver à

$$(n+1)^3 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Donc le principe d'induction implique l'affirmation. $\diamondsuit$

1–44 Exemple : Il y a des affirmation qui sont correctes pour beaucoup des valeurs possible de n, mais ne pas pour tous les valeurs de n. Comme exemple examiner les nombres pseudo–premier:

A_n : Si $2^{n-1} = 1 \bmod n$, puis n est un nombre premier

D'abord examiner cette affirmation pour quelques valeurs petits de n

n	2^{n-1}	$2^{n-1} \bmod n$	n premier	A_n
2	2	0	oui	correct
3	4	1	oui	correct
4	8	0	non	correct
5	16	1	oui	correct
7	64	1	oui	correct
9	256	4	non	correct
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
340	grand	8	non	correct

Mais pour $n = 341 = 11 \cdot 31$ on trouve $2^340 = 1 \bmod 341$. Donc l'affirmation A_{341} est faux. Il n'est pas possible de prouver A_n par une démonstration par récurrence. $\diamondsuit$

1–45 Résultat : *(formule du binôm)*
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Démonstration : Pour $n = 1$ le résultat est évident et la base de l'induction est donnée.

$$(1+x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \, x^k = \binom{1}{0} \, 1 + \binom{1}{1} \, x = 1 + x$$

pas d'induction:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)\,(1+x)^n \\
&= (1+x) \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{k} \, x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, x^{k+1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \, x^j + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} \, x^j + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) x^j + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1}
\end{aligned}$$

En problème 1–26 vérifier (par récurrence) que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

et donc

$$(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \, x^k + x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \, x^k$$

□

Voilà une autre version de récurrence.

1–46 Théorème : *Examiner pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une affirmation A_n*

1. *A_1 est vrai.*
2. *Si A_k est vrai pour tout $k \leq n$, puis A_{n+1} est vrai.*

Si les deux points ci–dessus sont satisfait l'affirmation A_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Entre les problèmes et exercices vous trouver beaucoup des exemples de démonstration par récurrence.

1.5 problèmes

1.5.1 problèmes avec des nombres

• **Problème 1–1:**
Enlever les parenthèses

(a) $(a+2)\,(7-b)$

(b) $(a+b)^3$

(c) $20x-((4x+2y)+(6x-y))$

(d) $45a-(50a-(10a-(3b+4c)+(6b-5c)))$

(e) $(a+b)\,(c+d-e)$

(f) $(a+b)\,(a-b)$

(g) $(a^2+ab+b^2)\,(a-b)$

(h) $(x^4+b^4)^3$

• **Problème 1–2:**
Simplifier les fractions.

(a) $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$

(b) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$

(c) $a\div\frac{c}{d}$

(d) $\frac{c}{d}\div a$

(e) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$

(f) $\dfrac{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

(g) $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})^2$

(h) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-1}{1+\frac{a+1}{a-1}}$

• **Problème 1–3:**
Trouver le représentation comme fractions décimale des nombres $7/13$ et $1212/19$.

• **Problème 1–4:**
Prouver que $x=321.012\overline{012}$ est un nombre rationnel et trouver la représentation correspondante.

• **Problème 1–5:**
Examiner les nombres ci–dessous et décider si ils sont rationnel ou irrationnel.

$$13.13 \qquad 27.12\overline{123} \qquad 1.12112111211112111112\ldots$$

• **Problème 1–6:**
Vérifier que si $x\in\mathbb{Q}$ et $s\in\mathbb{Q}$ puis on sait que $x\cdot s\in\mathbb{Q}$.

• **Problème 1–7:**
Vérifier que si $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $s\in\mathbb{Q}$ puis on sait que $x\cdot s\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

• **Problème 1–8:**
Montrer que x n'est pas rationnel, si $x\cdot x=3$.

• **Problème 1–9:**

Beweisen Sie, dass $\sqrt[3]{13}\notin\mathbb{Q}$

Prouver que $\sqrt[3]{13}\notin\mathbb{Q}$

• **Problème 1–10:**
Prouver que $\sqrt[3]{7} \notin \mathbb{Q}$.

• **Problème 1–11:**
Montrer que x n'est pas rationnel, si $x \cdot x \cdot x = 2$.

• **Problème 1–12:**
Prouver que pour tout nombre premier p le nombre $\sqrt{p}$ est irrationnel.

• **Problème 1–13:**
Considérer deux nombres premier p_1 et p_2. Prouver que le nombre $\sqrt{p_1\, p_2}$ est rationnel si et seulement si il est entier.

• **Problème 1–14:**
Examiner l'affirmation suivant.
Pour tout $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ ou $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Soit vous prover l'affirmation ou vous trouver un contre–exemple.

• **Problème 1–15:**
Re écrire comme fraction des nombres entiers.

(a) $0.37\overline{37}$

(b) $0.143456456\overline{456}$

(c) $1.\overline{5379}$

• **Problème 1–16:**
La fraction décimal de $\sqrt{2}$ commence avec les chiffres

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480 7\ldots$$

(a) Trouver un nombre rationnel simples (x_1), plus petit que $\sqrt{2}$, tel que la différence de $\sqrt{2}$ est plus petit que 10^{-8}.

(b) Trouver un nombre rationnel simples (x_1), plus grand que $\sqrt{2}$, tel que la différence de $\sqrt{2}$ est plus petit que 10^{-8}.

• **Problème 1–17:**
Considérer les deux nombres rationnels $x_1 = 10.12345432$ et $x_2 = 10.12345433$.

(a) Trouver deux nombres y_1 et y_2, irrationnels et simples, qui sont entre x_1 et x_2.

(b) Trouver un nombre rationnel entre y_1 et y_2.

• **Problème 1–18:**
La représentation d'un nombre z est donné par $z = 1.a_1a_2a_3a_4\ldots$ veut dire

$$z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, 10^{-k}$$

On sait que

$$0.a_1a_2a_3a_4\ldots = \frac{1}{1.a_1a_2a_3a_4\ldots}$$

(a) Trouver la valeur exacte de z.

(b) Prouver que $z \notin \mathbb{Q}$.

• **Problème 1–19:**

(a) Die Zahl $x = 2.1161616\overline{16}$ kann als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden. Finden Sie diesen Bruch.
Le nombre $x = 2.116161\overline{16}$ peut être écrit comme fraction de deux nombres entier. Trouver cette fraction.

(b) Berechen Sie a und b / Calculer a et b

$$\sum_{k=-2}^{n} (1 + k\,x) = a + b\,x$$

(c) Berechnen Sie exakt / Calculer d'une façon exacte

$$\frac{\prod_{k=1}^{5}(2\,k)}{\prod_{j=1}^{3}(j+2)}$$

• **Problème 1–20:**

(a) Trouver la longueur de la période de la représentation décimale du nombre $\frac{7}{13}$.

(b) Écrire le nombre x ci-dessous comme fraction de deux nombres entiers.

(c) Indiquer (avec $\times$) les nombres z qui sont élément des domaines des nombres données.

$x = 43.12468246824682\overline{2468}$

z	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$-5/2$					
$1.31\overline{31}$					
$\sqrt{361}$					
π					
$\sqrt{20}$					
$\sqrt{-16}$					

1.5.2 problèmes avec des sommes et produits

• **Problème 1–21:**
Utiliser le symbole $\sum$ pour la somme des carré des premiers 17 nombres. Calculer cette somme avec une calculatrice programmable.

• **Problème 1–22:**
Calculer

$$a = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n^2} \qquad e = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=5}^{k} 1$$

$$b = \sum_{h=1}^{5} (h-1) \qquad f = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{k} 1$$

$$c = \sum_{s=0}^{4} (s+2) \qquad g = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{k} k$$

$$d = \sum_{s=-4}^{4} (s+2) \qquad h = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{k} j$$

• **Problème 1–23:**
Écrire la produit des nombres pairs entre 1 et 48 avec le symbole $\prod$.

• **Problème 1–24:**
Écrire la produit des nombres impairs entre 1 et 48 avec le symbole $\prod$.

• **Problème 1–25:**
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

Calculer les expressions suivantes

$$a = \sum_{k=-19}^{20} 2\,k^3 \qquad b = \sum_{j=1}^{3} \left(\prod_{k=1}^{j} k \right)$$

$$c = \sum_{j=1}^{3} \left(\prod_{k=1}^{j} 2\,j \right) \qquad d = \sum_{k=0}^{n} 2\,k$$

• **Problème 1–26:**
Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Binomialkoeffizienten das für $1 \leq k \leq n$ die Beziehung

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

richtig ist.

• **Problème 1–27:**
Écrire les expressions a et b à l'aide des symbole des sommation et produit. Calculer les valeurs de c et d d'une façon exacte, sans utiliser la calculatrice.

$$a = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{31} \qquad b = 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 45$$

$$c = \sum_{k=1}^{9} (10-k) \cdot 10^{k-1} \qquad d = \prod_{k=1}^{3} \sum_{j=-k}^{k} |j|$$

• **Problème 1–28:**
Écrire les expressions suivantes à l'aide d'un seul symbol de somme ou produit ($\sum$, $\prod$).

$$\begin{aligned}
a &= 3+6+9+12+15+\ldots+33 \\
b &= \frac{1}{2}+1+2+4+8+\ldots+64 \\
c &= \frac{17!}{6!} \\
d &= \frac{24!}{2^{12}\cdot 12!} \\
e &= 1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\ldots+(1+2+\ldots+37) \\
& \quad \text{double somme}
\end{aligned}$$

1.5.3 démonstration par récurrence

• **Problème 1–29:**
Utiliser une démonstration par récurrence pour prouver la **somme géométrique**

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

si $q \neq 1$.

Pour les problèmes ci–dessous reécrire les formules avec le symbole de sommation et puis prouver les affirmations (source [Swok92]).

• **Problème 1–30:**
Utiliser récurrence pour prouver que

$$2+4+6+\ldots+2n = n\,(n+1)$$

• **Problème 1–31:**
Utiliser récurrence pour prouver que

$$1+4+7+10+\ldots+(3n-2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$$

• **Problème 1–32:**
Utiliser récurrence pour prouver que

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

• **Problème 1–33:**
Utiliser récurrence pour prouver que Beweisen Sie die Identität

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^{n-1} = 1+(n-1)\,2^n$$

• **Problème 1–34:**
Utiliser récurrence pour prouver que

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

• **Problème 1–35:**
Utiliser récurrence pour prouver que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$$

• **Problème 1–36:**
Utiliser récurrence pour prouver que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n\,(n+3)}{4\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

• **Problème 1–37:**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 + 2n \leq 3^n$.

• **Problème 1–38:**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ 3 est un diviseur de $n^3 - n + 3$.

• **Problème 1–39:**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ 3 est un diviseur de $n^2 + n$.

• **Problème 1–40:**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ 3 est un diviseur de $5^n - 1$.

• **Problème 1–41:**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ 9 est un diviseur de $10^{n+1} + 3\cdot 10^n + 5$.

• **Problème 1–42:**
L'expression $a^n - b^n$ peut être diviser par $(a-b)$.
Tip: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k\,(a-b) + (a^k - b^k)b$.

• **Problème 1–43:**
L'expression $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ peut être diviser par $(a+b)$.

• **Problème 1–44:**
Reécrire avec le symbole $\sum$ et puis prouver

(a)

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

(b)

$$y_n = \frac{1}{a\cdot(a+b)} + \frac{1}{(a+b)\cdot(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+n\cdot b-b)\cdot(a+n\cdot b)}$$

• **Problème 1–45:**
Une suite est donnée par

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4\cdot a_n + 4^n$$

Prouver que $a_n = n\cdot 4^{n-1}$.

• **Problème 1–46:**
Chercher et prouver une formule pour la somme des n premier nombres impairs.

Pour les problèmes ci–dessous il faut d'abord trouver la nombre la plus petit, tel que l'inégalité est juste. Puis prouver par récurrence l'affirmation.

• **Problème 1–47:**
Beweisen Sie die Ungleichung

$$n + 12 < n^2$$

mittels Induktion.

• **Problème 1–48:**
Beweisen Sie die Ungleichung

$$n^2 + 18 < n^3$$

mittels Induktion.

• **Problème 1–49:**
Beweisen Sie die Ungleichung

$$5 + \log_2 n < n$$

mittels Induktion.

• **Problème 1–50:**
Beweisen Sie die Ungleichung

$$10^n \leq n^n$$

mittels Induktion.

• **Problème 1–51:**
Beweisen Sie die Ungleichung

$$2^n \leq n!$$

mittels Induktion.

• **Problème 1–52:**
Behauptung: Alle Frauen der Welt haben dieselbe Augenfarbe.
Démonstration : Numeriere alle Frauen und benutze vollständige Induktion.

- Verankerung: Eine Frau hat dieselbe Augenfarbe. Klar!
- Induktionsschritt $n \to n+1$:
  Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten n Frauen dieselbe Augenfarbe, ebenso die zweite bis (n+1)–ste Frau. Somit haben die erste und (n+1)–ste Frau dieselbe Augenfarbe.

□

Das Resultat ist offensichtlich falsch. Was ist falsch am Beweis?

• **Problème 1–53:**
Prouver l'inégalité de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x \quad \text{pour tout} \quad x \geq -1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Expliquer pourquoi on a besoin de la condition $x > -1$.

• **Problème 1–54:**
Soit / Setzen Sie

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$$

(a) Reécrire s_4 sans le symbole $\sum$.
Schreiben Sie s_4 ohne das Symbol $\sum$.

(b) Prouver par récurrence / Beweisen Sie mittels Induktion $s_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

1.5.4 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 1–5 : Rational, rational, irrational.

Solution pour problème 1–9 : Démonstration par contradiction.
Supposition: $x = a/b$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $x \cdot x \cdot x = 13$
Chercher la factorisation de a et b

$$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \qquad b = q_1 q_2 q_3 \ldots q_m \qquad .$$

A cause de $x \cdot x \cdot x = 13$ on sait que $a^3 = 13\, b^3$ et donc

$$p_1 p_1 p_1\, p_2 p_2 p_2\, p_3 p_3 p_3 \ldots p_n p_n p_n = 13\; q_1 q_1 q_1\; q_2 q_2 q_2\; q_3 q_3 q_3 \ldots q_m q_m q_m \qquad .$$

A gauche de cette signe d'égalité on trouve un multiple de 3 de facteurs 13, mais a droite le nombre des facteurs 13 est un multiple de 3 plus 1. Donc on a deux factorisation différentes du même nombre. Donc la supposition doit être faux et on sait que $\sqrt[3]{13}$ ne peut pas être écrit comme fraction de deux nombres entiers.

Solution pour problème 1–18 :

(a)

$$z - 1 = \frac{1}{z} \quad \text{oder} \quad z^2 - z - 1 = 0$$

und somit

$$z = \frac{1}{2}\, \left(1 \pm \sqrt{1+4}\right)$$

Da offensichtlich $1 \leq z \leq 2$ gilt

$$z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(b)

$$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow 1 + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$$

Solution pour problème 1–19 :

(a)

$$\begin{array}{rcr} 100\, x & = & 211.6161616\overline{16} \\ x & = & 2.116161616\overline{16} \\ \hline 99\, x & = & 209.500\overline{0} \end{array}$$

Somit gilt

$$x = \frac{209.5}{99} = \frac{2095}{990} = \frac{419}{198}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=-2}^{n} (1 + k\,x) &= (n+3) + x \sum_{k=-2}^{n} k \\ &= (n+3) + x\, \frac{(n+3)\,(n-2)}{2} \\ &= a + b\,x \end{aligned}$$

und somit $a = n+3$ und $b = \dfrac{(n+3)\,(n-2)}{2}$.

(c)

$$\frac{\prod_{k=1}^{5}(2\,k)}{\prod_{j=1}^{3}(j+2)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{3\cdot 4\cdot 5} = 64$$

Solution pour problème 1–20 :

(a) Wegen $\frac{7}{13} = 0.\overline{538461}$ ist die Länge der Periode 6.

(b) Wegen

$$10000\cdot x - x = 431246.8246824682\overline{2468} - 43.124682468246824682\overline{2468} = 431203.7 = \frac{4312037}{10}$$

gilt

$$x = \frac{4312037}{99990}$$

(c)

z	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$-5/2$			$\times$	$\times$	$\times$
$1.31\overline{31}$			$\times$	$\times$	$\times$
$\sqrt{361}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
π				$\times$	$\times$
$\sqrt{20}$				$\times$	$\times$
$\sqrt{-16}$					$\times$

Solution pour problème 1–21 : 1785

Solution pour problème 1–22 : $a = 49/36$, $b = 10$, $c = 20$, $d = 18$, $e = 6$, $f = 28$, $g = 140$, $h = 84$.

Solution pour problème 1–23 :

$$\prod_{k=1}^{24}(2\,k) = 2^{24}\prod_{k=1}^{24}k = 2^{24}24!$$

Solution pour problème 1–24 :

$$\prod_{k=1}^{24}(2k-1) = \frac{48!}{2^k 24!}$$

Solution pour problème 1–25 :

(a) Alle Terme ausser dem Letzten heben sich weg.

$$a = \sum_{k=-19}^{20} 2\,k^3 = 2\cdot 20^3 = 16000$$

(b)

$$\begin{aligned} b &= \sum_{j=1}^{3}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{1} k\right) + \left(\prod_{k=1}^{2} k\right) + \left(\prod_{k=1}^{3} k\right) \\ &= (1) + (2) + (6) = 9 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} c &= \sum_{j=1}^{3}\left(\prod_{k=1}^{j} 2\,j\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{1} 2\right) + \left(\prod_{k=1}^{2} 4\right) + \left(\prod_{k=1}^{3} 6\right) \\ &= (2) + \left(4^2\right) + \left(6^3\right) = 2 + 16 + 216 = 234 \end{aligned}$$

(d) Arithmetische Summe

$$d = \sum_{k=0}^{n} 2\,k = 2\,\sum_{k=0}^{n} k = 2\,\frac{n\,(n+1)}{2} = n\,(n+1)$$

Solution pour problème 1–26 :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\,\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\,\left(\frac{(n-k+1)+k}{k\,(n-k+1)}\right) \\ &= \frac{(n+1)\cdot n!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)!} \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Solution pour problème 1–27 :

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{31} = \sum_{k=0}^{15}\frac{1}{2k+1} \\ b &= 12\cdot 15\cdot 18\cdot 21\cdot\ldots\cdot 45 = \prod_{k=4}^{15}(3\,k) \\ c &= \sum_{k=1}^{9}(10-k)\cdot 10^{k-1} \;=\; 123456789 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d &= \prod_{k=1}^{3}\sum_{j=-k}^{k}|j| \\
&= \left(\sum_{j=-1}^{1}|j|\right)\cdot\left(\sum_{j=-2}^{2}|j|\right)\cdot\left(\sum_{j=-3}^{3}|j|\right) \\
&= (1+0+1)\cdot(2+1+0+1+2)\cdot(3+2+1+0+1+2+3) \\
&= 2\cdot 6\cdot 12 = 144
\end{aligned}$$

Solution pour problème 1–28 :

$$\begin{aligned}
a &= 3+6+9+12+15+\ldots+33 = \sum_{k=1}^{11} 3\,k \\
b &= \frac{1}{2}+1+2+4+8+\ldots+64 = \sum_{k=-1}^{6} 2^k \\
c &= \frac{17!}{6!} = \frac{\prod_{k=1}^{17} k}{\prod_{j=1}^{6} j} = \prod_{k=7}^{17} k \\
d &= \frac{24!}{2^{12}\cdot 12!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 24}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 24} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 23 = \prod_{k=0}^{11}(2\,k+1) \\
d &= \frac{24!}{2^{12}\cdot 12!} = \frac{1}{2^{12}}\prod_{k=13}^{24} k = \prod_{k=13}^{24}\frac{k}{2} \\
e &= 1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+37) = \sum_{j=1}^{37}\left(\sum_{k=1}^{j} k\right)
\end{aligned}$$

Solution pour problème 1–29 :

- Verankerung bei $n=1$

$$\sum_{k=0}^{1} q^k = 1+q = \frac{(1+q)\,(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^2}{1-q}$$

- Induktionsschritt von n zu $n+1$
  - Verwende :
  $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
  - Zu zeigen :
  $$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$
  - Rechnung :
  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} \\
  &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}
  \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

Aufgrund der Prinzips der vollständigen Induktion ist die Behauptung somit verifiziert.

Solution pour problème 1–42 :

- Induktionsverankerung, $n = 1$:
  $a^1 - b^1$ ist offensichtlich durch $(a - b)$ teilbar.

- Induktionsschritt von n zu $n + 1$:
  Wir dürfen verwenden, dass $a^n - b^n$ durch $(a - b)$ teilbar ist, d.h.

  $$a^n - b^n = K\ (a - b)$$

  Zu zeigen ist, dass $a^{n+1} - b^{n+1}$ durch $(a - b)$ teilbar ist.

  $$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^n\,(a-b) + (a^n - b^n)b \\ &= a^n\,(a-b) + K\,(a-b)\,b \\ &= (a-b)\,(a^n\ + K\,b) \end{aligned}$$

Aufgrund der Prinzips der vollständigen Induktion ist die Behauptung somit verifiziert.

Solution pour problème 1–44 : (a) $\frac{n}{n+1}$, (b) $\frac{n}{a(a+nb)}$

Solution pour problème 1–52 : Der Induktionsschritt von n=1 zu zu $n + 1 = 2$ ist falsch.

Solution pour problème 1–53 :

- Verankerung: für $n = 1$ ist $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ richtig

- Induktionsschritt $n \to n + 1$:

  – Verwende : $(1 + x)^n \geq 1 + n\,x$
  – Zu zeigen : $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\,x$
  – Rechnung :

  $$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)\,(1+x)^n \\ &\geq (1+x)\,(1+n\,x) \quad \text{verwende Induktionsannahme und } 1-x>0 \\ &= 1+(n+1)\,x+x^2 \geq 1+(n+1)\,x \end{aligned}$$

Aufgrund der Prinzips der vollständigen Induktion ist die Behauptung somit verifiziert.

Solution pour problème 1–54 :

(a)

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} = \frac{13}{8}$$

(b) Verankerung bei $n = 1 : s_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2}$. OK.
Induktionsschritt

$$s_{n+1} = s_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n^2}{2+n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

und mittles dem Prinzip der vollständigen Induktion ist der Beweis erbracht.

1.6 récapitulation

Après ce chapitre on doit

- connaître les types différentes des nombres.
- maîtriser la connection entre nombres rationnels et fraction décimales.
- savoir pourquoi $\sqrt{13}$ n'est pas un nombre rationnel.
- savoir calculer avec les symbole de sommation et produit.
- savoir calculer des sommes arithmétique et géométrique.
- connaître les structures générales des méthodes de démonstration.

Chapitre 2

Nombres complexes

Il existe des problèmes simples sans solutions réels. Pour résoudre l'équation

$$z^2 - z + 4 = 0$$

on utilise la formule pour les solutions d'une équation quadratique

$$z_{1,2} = \frac{1}{2\,a}\,\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\right) = \frac{1}{2}\,\left(1 \pm \sqrt{1-16}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\,\sqrt{-1}$$

et donc cette équation n'a pas de solution réels. Donc un a définie un nouveau type de nombre i tel que $i^2 = -1$ et puis

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\,\sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\,i = x + i\,y \quad \text{avec} \quad x\,,\,y \in \mathbb{R}$$

2–1 Définition : Pour $x, y \in \mathbb{R}$ le nombre $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ est dit un **nombre complexe**. x est dit la **partie réelle** et y la **partie imaginaire** de z. Donc chaque nombre complexe z est représenté par un pair (x, y) de nombres réels. On écrit

$$\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Re}(a + i\,b) = a \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,z = \mathrm{Im}(a + i\,b) = b$$

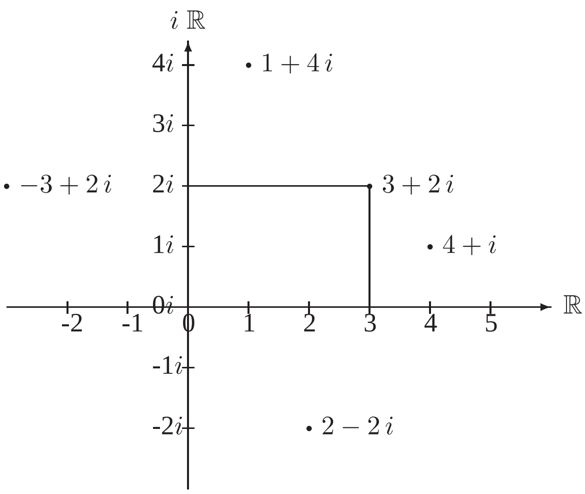


Figure 2.1: le plan des nombers complexe, representé par des points

On définit dans le plan un système cartésienne d'axes rectangulaire et on note les réels sur l'axe des x et les imaginaire sur l'axe des y en prenant i comme unité. Le nombre complexe $z = x + i\,y$ peut être ainsi représenté par le point Z dont les coordonnées sont (x, y), ou par le vecteur $\vec{z}$ joignant l'origine à ce point. Examiner figure 2.1 et 2.2.

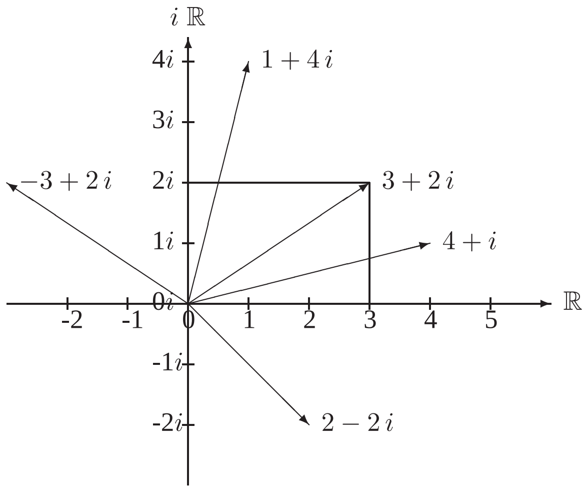


Figure 2.2: le plan des nombers complexe, representé par des vecteurs

2.1 définitions et opérations de base

2–2 Définition : Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes avec

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \quad \text{et} \quad z_1 = x_2 + i\,y_2$$

Puis **l'addition** est donnée par

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) = (x_1 + x_2) + i\ \ (y_1 + y_2)$$

En figure 2.3 vérifier que l'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs avec les partie réelles et imaginaires comme composantes des vecteurs.

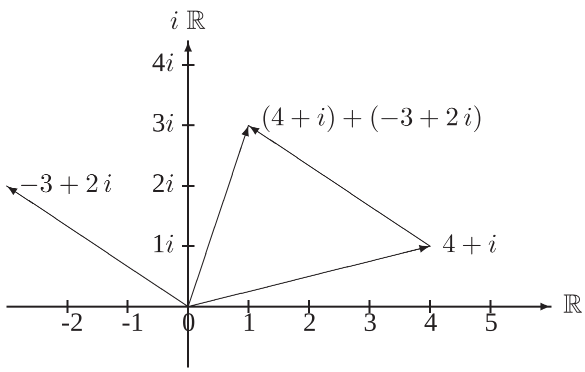


Figure 2.3: addition de deux nombres complexes

2–3 Définition : Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes avec

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \quad \text{et} \quad z_1 = x_2 + i\,y_2$$

Puis **multiplication** est donnée par

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i\,y_1) \cdot (x_2 + i\,y_2) = (x_1\,x_2 - y_1 y_2) + i\;(x_1\,y_2 + x_2\,y_1)$$

2–4 Exemple :

(a)

$$(1 - i\,4) + (3 + 7\,i) = 4 + i\,3$$

(b)

$$(1 - i\,4) \cdot (3 + 7\,i) = (3 + 28) + i\;(7 - 12) = 31 - i\,5$$

(c) Avec *Octave* on arrive à

Octave

```
(1-i)+(3+7*i)

ans =   4 + 6i
```

Octave

```
(1-i)*(3+7*i)

ans =   10 +   4i
```

(d) Pour $x \in \mathbb{R}$ on arrive à

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}\,i)\;(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\,i) \\ &= \left(x^2 - 2\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - i^2\,\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2\right) \\ &\quad +i\,\left((x - \frac{1}{2})\,\frac{\sqrt{15}}{2} - (x - \frac{1}{2})\,\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \\ &= \left(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{15}{4}\right) + 0 = x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

Voilà la fonction utilisée dans l'introduction de ce chapitre.

(e) Simplifier le calcul précédent: $(a + b)\;(a - b) = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}\,i)\;(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\,i) \\ &= \left((x - \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{15}}{2}\,i\right)\;\left((x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{15}}{2}\,i\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\,i\right)^2 \\ &= \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{15}{4} = x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2–5 Résultat : *Soit $z_i \in \mathbb{C}$. Puis on a les règles de calcul*

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$	*loi de commutativité*
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$	*loi d'assoziativité*
$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$	*loi de distributivité*

2–6 Exemple : Pour $a, b \in \mathbb{R}$ chercher un nombre complexe $z = x + i\,y$ tel que $z \cdot (a + i\,b) = 1$.

Solution: Version 1:
Résoudre l'équation

$$\begin{aligned} 1 + i\,0 &= z \cdot (a + i\,b) = (x + i\,y) \cdot (a + i\,b) \\ &= (x\,a - y\,b) + i\,(x\,b + y\,a) \end{aligned}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Comparer partie réelle et imaginaire pour arriver à

$$\begin{array}{lll} x\,a & -y\,b & = 1 \\ x\,b & +y\,a & = 0 \end{array}$$

avec les solutions

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Version 2:
Si $z \cdot (a + i\,b) = 1$ on sait que

$$z = x + i\,y = \frac{1}{a + i\,b} = \frac{1}{(a + i\,b)}\frac{(a - i\,b)}{(a - i\,b)} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\,\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

En effet on a trouvé le calcul pour la division des nombres complexes. On a divider 1 par $a + i\,b$. $\diamondsuit$

2–7 Résultat : *Pour $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ on a*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + i\,b} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2}$$

2–8 Définition : Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$. Puis le nombre complexe

$$\overline{z} = \overline{a + i\,b} = a - i\,b$$

est dit le **nombre (complexe) conjugué** et

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

est dit **norme** (ou son **module**).

2–9 Exemple : Pour $z = 1 - i\,3$ on a $\overline{z} = \overline{1 - i\,3} = 1 + i\,3$ et $|z|^2 = 1^2 + 3^2$ et donc $|z| = \sqrt{10}$. $\diamondsuit$

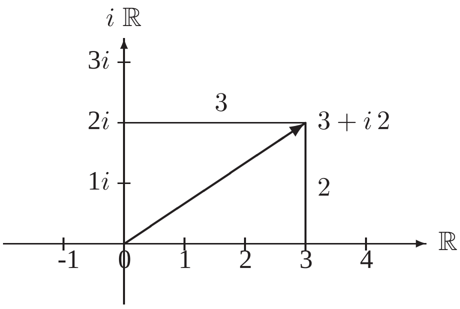


Figure 2.4: norme d'un nombre complexe

2–10 Résultat : *En figure 2.4 vérifier que la norme $|z|$ d'un nombre complexe correspond à la longueur du vecteur. Utiliser le théorème de Pythagore.*

2–11 Résultat : *Soit $z_i \in \mathbb{C}$. Puis on a les résultat simples et importants*

$$\begin{aligned}
\overline{z}_1 + \overline{z}_2 &= \overline{z_1 + z_2} \\
\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 &= \overline{z_1 \cdot z_2} \\
\frac{1}{\overline{z}} &= \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \\
z + \overline{z} &= 2\,\mathrm{Re}\,z \\
z - \overline{z} &= i\,2\,\mathrm{Im}\,z \\
z \cdot \overline{z} &= |z|^2
\end{aligned}$$

Démonstration : Calculations simples. □

2–12 Lemme : *Pour tout nombres $x, y \in \mathbb{R}$ on a*

$$2\,x\,y \leq x^2 + y^2$$

Démonstration : Regarder

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2\,x\,y + y^2$$

et donc

$$2\,x\,y \leq x^2 + y^2$$

□

2–13 Résultat : *Inégalité du triangle pour des nombres complexes.*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Démonstration : Version analytique:
Examiner le carré de chaque côté de l'inégalité. Soit $z_1 = a_1 + i\,b_1$ et $z_2 = a_2 + i\,b_2$ et donc

$$\begin{aligned}
|z_1|^2 &= a_1^2 + b_1^2 \\
|z_2|^2 &= a_2^2 + b_2^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
(\ |z_1| + |z_2|\ )^2 &= |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\
&= a_1^2 + b_1^2 + 2\,\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2} + a_2^2 + b_2^2
\end{aligned}$$

Pour la somme $z_1 + z_2$ on trouve

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= |\ (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)\ |^2 \\
&= (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \\
&= (a_1^2 + 2\,a_1 a_2 + a_2^2) + (b_1^2 + 2\,b_1 b_2 + b_2^2)
\end{aligned}$$

Donc on remplace l'inégalité originale

$$|z_1 + z_2|^2 \le (\ |z_1| + |z_2|\ )^2$$

par l'inégalité équivalent

$$2\,a_1 a_2 + 2\,b_1 b_2 \le 2\,\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

ou

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \le \sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

Cette inégalité est vraie si

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \le \left(a_1^2 + b_1^2\right)\ \left(a_2^2 + b_2^2\right)$$

Puis on applique des transformations suivantes

$$\begin{aligned}
(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 &\le \left(a_1^2 + b_1^2\right)\ \left(a_2^2 + b_2^2\right) \\
a_1^2 a_2^2 + 2\,a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 &\le a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 \\
2\,a_1 a_2 b_1 b_2 &\le a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2
\end{aligned}$$

Puis utiliser le lemme précédant avec $x = a_1 b_2$ et $y = a_2 b_1$ pour vérifier que cette inégalité est vraie. $\square$

Démonstration : Version géométrique:
Pour un triangle avec les longueurs de côtés a, b et c on a toujours $a + b \ge c$ et donc figure 2.5 montre que $|z_1| + |z_2| \ge |z_1 + z_2|$. $\square$

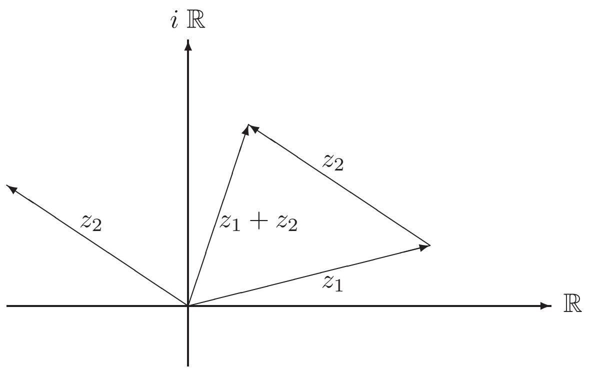


Figure 2.5: inégalité du triangle $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

2.2 coordonnées polaires

Un nombre complexe $x = x + i\,y$ peut aussi être donné par son norme $|z|$ et son **argument** $\varphi = \arg z$, caractérisé par

$$\tan\varphi = \tan\arg z = \tan(\arg(x + i\,y)) = \frac{y}{x}$$

et z est donné par

$$z = x + i\,y = |z|\ (\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

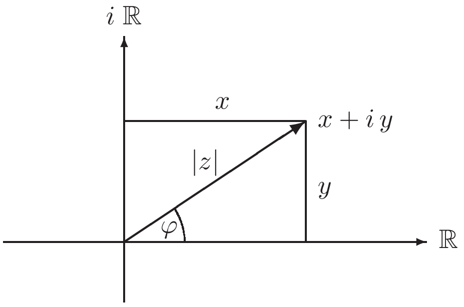


Figure 2.6: norme et argument d'un nombre complexe

On aimerait bien utiliser $\arg z = \arctan y/x$ pour $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, mais cette formule peut être fausse. Le problème vient de l'équation $\tan(\varphi + k\pi) = \tan(\varphi)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. If faut d'abord choisir les angles φ a regarder et puis trouver la formule pour $\arg z$ dans chaque quadrant du plan complexe. Par définition la fonction $\arctan x$ rend un résultat entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Pour définir la fonction $\arg z$ deux possibilités sont utiliser souvent: $0 \leq \arctan z < 2\,\pi$ et $-\pi < \arctan z \leq \pi$ (voir tableau 2.1).

$z = x + i\,y$	$0 \leq \arg z < 2\,\pi$	$-\pi < \arg z \leq \pi$
$x > 0$ et $y \geq 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x}$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x}$
$x = 0$ et $y > 0$	$\arg(x + i\,y) = \frac{\pi}{2}$	$\arg(x + i\,y) = \frac{\pi}{2}$
$x < 0$ et $y \geq 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + \pi$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + \pi$
$x < 0$ et $y < 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + \pi$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} - \pi$
$x = 0$ et $y < 0$	$\arg(x + i\,y) = \frac{3\,\pi}{2}$	$\arg(x + i\,y) = -\frac{\pi}{2}$
$x > 0$ et $y < 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + 2\,\pi$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x}$

Tableau 2.1: Deux définitions de la fonction $\arg z$

2–14 Remarque : Dans quelques langues de programmation il y a des commandes pour calculer l'angle entre l'axe des x et un vecteurs (x, y). Cette commande **utilise** la fonction $\arctan$. Voir tableau 2.2 pour les modification en *Mathematica* et *Octave*. Ces modifications demande deux arguments au lieu d'un argument. ♢

Octave

```
octave:1> help  atan2
atan2 is a builtin function

atan2 (Y, X): atan (Y / X) in range -pi to pi
```

Mathematica

```
?ArcTan
.
ArcTan[z] gives the inverse tangent of z. ArcTan[x, y] gives the inverse
   tangent of y/x where x and y are real, taking into account which
   quadrant the point (x, y) is in.
```

Tableau 2.2: Modifications de la fonction $\arctan$

2.3 multiplication des nombres complexes

2–15 Résultat : *Soit*

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + i\, y_1 = |z_1|\ (\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1) \\ z_2 &= x_2 + i\, y_2 = |z_2|\ (\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) \end{aligned}$$

Puis

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\ (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Donc la norme d'un produit de deux nombres est donné par le produit des normes des nombres et l'argument est donnée comme somme des deux arguments.

Démonstration : Utiliser les théorèmes d'additions des fonction trigonométriques.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\ (\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1) \cdot |z_2|\ (\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\ (\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1) \cdot\ (\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\ ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i\ (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\ (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

□

Le résultat ci–dessus s'applique aussi au produits de multiples nombres et on obtient

$$\begin{aligned} \left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| &= \prod_{j=1}^{n} |\, z_j\, | \\ \arg\left(\prod_{j=1}^{n} z_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \arg\ z_j \end{aligned}$$

et on arrive à l'interprétation suivant de la multiplication des nombres complexes.

2–16 Résultat : *Considérer le nombre $a + i\, b \in \mathbb{C}$ comme vecteur et multiplier ce nombre avec $z = x + i\, y \in \mathbb{C}$. L'effet sur le nombre $a + i\, b$ est:*

1. *allonger le „vecteur“ (a, b) par le facteur $|z|$.*
2. *rotation du résultat de l'opération précédant par l'angle $\arg z$.*

2–17 Exemple : Considérer le „triangle“ avec les coins $3+i$, $5+4\,i$ et $1+i3$. Une multiplication de ce triangle par $z=(1+i)/2$ donne le deuxième triangle en figure 2.7. On a $\arg z=\pi/4$ et $|z|=1/\sqrt{2}$, donc vous trouver une rotation par $45°$ et une compression par un facteur $1/\sqrt{2}$. ♢

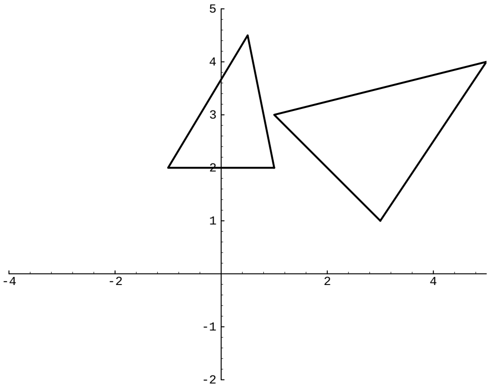


Figure 2.7: rotation d'un triangle

2.4 formule de Euler et représentation exponentielle

La formule pour l'argument d'un produit des nombres ressemble à une propriété de la fonction exponentielle

$$\begin{aligned}
\exp\left(x_1+x_2\right) &= \exp x_1\cdot\exp x_2\\
\exp\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) &= \prod_{j=1}^{n}\exp\,x_j
\end{aligned}$$

et donc il y a des connections entre nombres complexes et la fonction exponentielle.

2–18 Définition : (Formule de Euler)
Pour $\alpha\in\mathbb{R}$ on met

$$\boxed{e^{i\,\alpha}=\cos\,\alpha+i\,\sin\,\alpha}$$

Le théorème de Pythagore montre que

$$\begin{aligned}
\left|e^{i\,\alpha}\right| &= \left|\cos\,\alpha+i\,\sin\,\alpha\right|\\
&= \sqrt{\cos^2\,\alpha+\sin^2\,\alpha}=1
\end{aligned}$$

2–19 Exemple : Vérifier que

$$\begin{aligned}
e^{i\,\pi} &= \cos\,\pi+i\,\sin\,\pi=-1\\
e^{i\,\pi/2} &= \cos\,\frac{\pi}{2}+i\,\sin\,\frac{\pi}{2}=i\\
e^{i} &= \cos\,1+i\,\sin\,1\\
e^{i\,(x+2\,\pi)} &= e^{i\,x}
\end{aligned}$$

La fonction $f\,(x)=e^{i\,x}$ est 2π–périodique. ♢

2–20 Résultat : *Un nombre $z \in \mathbb{C}$ peut être écrit dans la forme*

$$\boxed{z = |z|\; e^{i \arg z}}$$

Démonstration : Vérifier que

$$\arg\left(|z|\; e^{i \arg z}\right) = \arg e^{i \arg z} = \arg z$$

et

$$\left|\; |z|\; e^{i \arg z}\;\right| = |z|\; \left|e^{i \arg z}\right| = |z| \cdot 1$$

Donc arguments et normes des deux nombres z et $|z| \exp(i\; \arg z)$ coïncident et les nombres ont égaux. □

2–21 Remarque : Pour $a\,,\; b \in \mathbb{R}$ on met $z = e^{a+i\,b}$ et puis

$$z = e^{a+i\,b} = e^a \cdot e^{i\,b} = |z| \cdot e^{i \arg z}$$

Donc $|z| = e^a$ et $\arg z = b + k\, 2\,\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. ♢

2–22 Exemple : Un nombre $z \in \mathbb{C}$ peut être représenter dans des formes différentes

1. $z = a + i\,b$
2. comme pair de nombres réels (a, b)
3. avec norme et argument
4. dans la forme exponentielle $z = \exp\left(\ln|z| + i\; \arg z\right)$

$z \in \mathbb{C}$	pair de $\mathbb{R}$	norme/argument	forme exponentielle
$z = 1 + i$	$(1, 1)$	$\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ et $\arg z = \frac{\pi}{4}$	$z = \exp\left(\ln\sqrt{2} + i\,\frac{\pi}{4}\right)$
$z = 1$	$(1, 0)$	$\lvert z\rvert = 1$ et $\arg z = 0$	$z = \exp\left(0 + i\,0\right) = \exp 0$
$z = -i\,3$	$(0, -3)$	$\lvert z\rvert = 3$ et $\arg z = -\frac{\pi}{2}$	$z = \exp\left(\ln 3 - i\,\frac{\pi}{2}\right)$
$z = 3 - i\,4$	$(3, -4)$	$\lvert z\rvert = 5$ et $\arg z = -\arctan\frac{4}{3}$	$z = \exp\left(\ln 5 - i\; \arctan\frac{4}{3}\right)$

♢

Les résultats ci–dessous montre que l'identité $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ est aussi vrai pour la fonction exponentielle complexe.

2–23 Résultat : *Pour $\alpha\,,\; \beta \in \mathbb{R}$ on a*

$$e^{i\,(\alpha+\beta)} = e^{i\,\alpha} \cdot e^{i\,\beta}$$

Démonstration : Les calculations sont très similaires au calculations dans la démonstration pour la multiplication de deux nombres complexes.

$$\begin{aligned}
e^{i\,\alpha} \cdot e^{i\,\beta} &= (\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha) \cdot (\cos\,\beta + i\,\sin\,\beta) \\
&= (\cos\,\alpha \cos\,\beta - \sin\,\alpha \sin\,\beta) + i\,(\cos\,\alpha \sin\,\beta + \cos\,\beta \sin\,\alpha) \\
&= \cos\,(\,\alpha +\,\beta) + i\,\sin\,(\,\alpha +\,\beta) \\
&= e^{i\,(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

□

2–24 Résultat : *Pour des nombres complexes* $z_j \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \exp z_1 \cdot \exp z_2 \\ \exp\left(\sum_{j=1}^n z_j\right) &= \prod_{j=1}^n \exp\, z_j \end{aligned}$$

Comme conséquence simple on arrive à

2–25 Résultat : *Pour des nombres complexes* $z_j \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|\; e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)} \\ \prod_{j=1}^n z_j &= \left(\prod_{j=1}^n |z_j|\right) \cdot \exp\left(i \sum_{j=1}^n \arg\, z_j\right) \end{aligned}}$$

2–26 Résultat : *(formule de DeMoivre* [1]*)*
Pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $z = |z|\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$ *on a*

$$z^n = |z|^n\;(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^n = |z|^n\;(\cos(n\alpha) + i\,\sin(n\alpha))$$

Démonstration :

$$(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^n = \left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{i\alpha\,n} = \cos(n\alpha) + i\,\sin(n\alpha)$$

□

2–27 Exemple : Utiliser la formule du binôme et de DeMoivre avec $n = 3$ et obtenir

$$\begin{aligned} (\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^3 &= \cos^3\alpha + 3\,i\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha + 3\,(i)^2\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha + (i)^3\,\sin^3\,\alpha \\ &= \cos^3\alpha + 3\,i\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha - 3\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha - i\,\sin^3\,\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha + i\,\left(3\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha - \sin^3\,\alpha\right) \\ (\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^3 &= \cos(3\alpha) + i\,\sin(3\alpha) \end{aligned}$$

Comparer partie réels et imaginaire pour conclure

$$\begin{aligned} \cos(3\,\alpha) &= \cos^3\alpha - 3\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha = \cos\,\alpha\;(\cos^2\alpha - 3\sin^2\,\alpha) \\ \sin(3\,\alpha) &= 3\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha - \sin^3\,\alpha = \sin\,\alpha\;(3\,\cos^2\,\alpha - \sin^2\,\alpha) \end{aligned}$$

♢

2.5 raçines des nombres complexes

[1] Abraham DeMoivre (1667–1754), mathématicien français. Il a contribué au statistique, probabilité et trigonométrie

2–28 Exemple : Pour $z = 1 + i$ chercher z^1, z^3 et z^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Pour trouver $z^3 = z \cdot z \cdot z$ il faut multiplier les normes et multiplier l'argument par 3. Donc

$$z^3 = |z|^3 \, e^{i\,3\,\arg z} = \sqrt{2}^3 \, e^{i\,2\,\frac{\pi}{4}}$$

On a aussi

$$z^n = |z|^n \, e^{i\,n\,\arg z} = \sqrt{2}^n \, e^{i\,n\,\frac{\pi}{4}}$$

$\diamondsuit$

2–29 Exemple : Résoudre l'équation

$$z^5 = 32$$

Si on insiste sur $z \in \mathbb{R}$ il y a une seule solution $z_1 = 2$. Utiliser les nombres complexes et

$$\begin{aligned} \left|z^5\right| &= |z|^5 = 32 \\ \arg\, z^5 &= 5\,\arg z = 0 + k\,2\,\pi \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc on obtiens les conditions

$$\begin{aligned} |z| &= 2 \\ \arg z &\in \frac{2\,\pi}{5}\,\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc on a cinq solutions différentes

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\,e^{i\,0} \\ z_2 &= 2\,e^{i\,\frac{2\pi}{5}} \\ z_3 &= 2\,e^{i\,2\,\frac{2\pi}{5}} \\ z_4 &= 2\,e^{i\,3\,\frac{2\pi}{5}} \\ z_5 &= 2\,e^{i\,4\,\frac{2\pi}{5}} \end{aligned}$$

Les solutions sont sur un cercle de rayon 2 et les différences des argument sont des multiples de $\frac{2\pi}{5}$ veut dire de $\frac{360^\circ}{5}$. Mais il n'y a pas d'autres solutions, par exemples

$$\begin{aligned} z_6 &= 2\,e^{i\,5\,\frac{2\pi}{5}} = 2\,e^{i\,2\,\pi} = z_1 \\ z_7 &= 2\,e^{i\,7\,\frac{2\pi}{5}} = 2\,e^{i\,\frac{2\pi}{5}} = z_2 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2–30 Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 0$. Puis pour $n \in \mathbb{N}$ on met

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\varphi}$$

et $\varphi \geq 0$ est le plus petit angle tel que

$$n\,\varphi = \arg z + k\,2\,\pi \quad \text{pour un} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pour beaucoup des exemples on a donc

$$\arg\,\sqrt[n]{z} = \varphi = \frac{\arg z}{n}$$

2–31 Résultat : *Soit $Z \in \mathbb{C}$ et $Z \neq 0$. Puis pour $n \in \mathbb{N}$ les n solutions de l'équation*

$$z^n = Z$$

sont données par

$$z_i = \sqrt[n]{|Z|}\; e^{i\,k\,\frac{2\,\pi}{n}} \qquad \textit{pour} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

Les solutions sont sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{|Z|}$ et les différences des arguments sont des multiples de $\frac{2\,\pi}{n}$ veut dire de $\frac{360^\circ}{n}$.

2–32 Exemple : Résoudre $z^3 = i$.

Solution: On a $\arg i = \pi/2$ et donc

$$(i)^{1/3} = 1\; e^{i\,\frac{\pi}{6}}$$

Puis

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\,\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} \\
z_2 &= e^{i\,\frac{\pi}{6}}\, e^{i\,\frac{2\,\pi}{3}} = \cos\frac{5\,\pi}{6} + i\,\sin\frac{5\,\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} \\
z_3 &= e^{i\,\frac{\pi}{6}}\, e^{i\,\frac{4\,\pi}{3}} = \cos\frac{9\,\pi}{6} + i\,\sin\frac{9\,\pi}{6} = 0 - i
\end{aligned}$$

◇

2.6 impédance complexe

Considérer un courant alternatif $I\,(t) = I_0\,\sin\,(\omega t)$. Donc la fréquence est $f = \frac{\omega}{2\,\pi}$. Puis examiner un circuit avec résistances, condensateur et inductance. Pour ces élément on trouve la tension $V\,(t)$ comme

$$\begin{aligned}
V\,(t) &= R\,I_0\,\sin\,(\omega t) && \text{résistance } R \\
V\,(t) &= \frac{-1}{\omega\,C}\,I_0\,\cos\,(\omega t) && \text{capacité } C \\
V\,(t) &= \omega\,L\,I_0\,\cos\,(\omega t) && \text{inductance } L
\end{aligned}$$

Examiner les figures 2.8, 2.9 et 2.10.

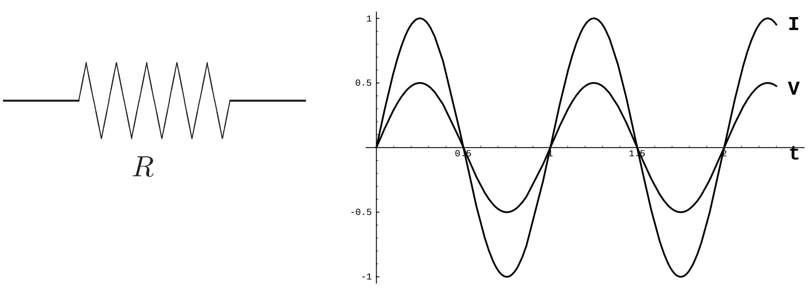


Figure 2.8: courant et tension pour une résistance R

Avec la fonction exponentielle complexe $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$ on obtient $\sin\alpha = \operatorname{Im} e^{i\alpha}$. On voit que

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2) = \operatorname{Im} e^{i(\alpha+\pi/2)} \quad \text{et} \quad -\cos\alpha = \sin(\alpha - \pi/2) = \operatorname{Im} e^{i(\alpha-\pi/2)}$$

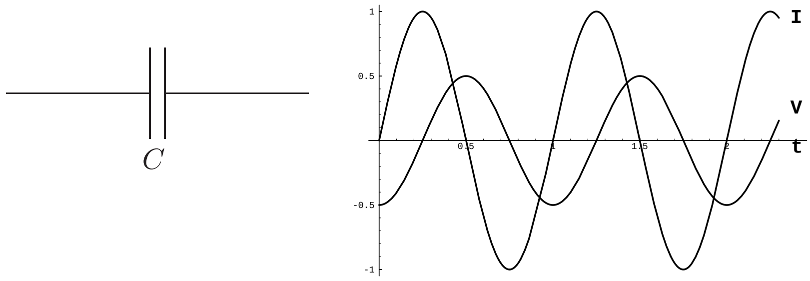


Figure 2.9: courant et tension pour une capacité C

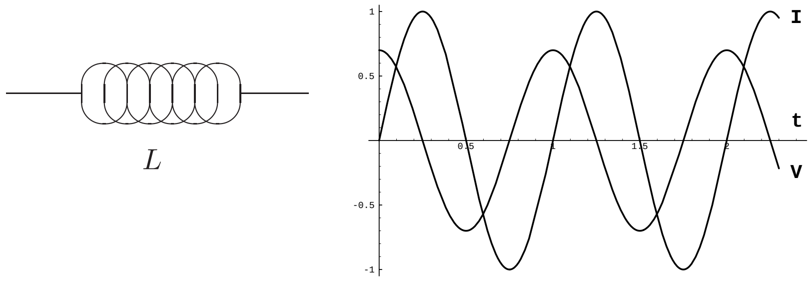


Figure 2.10: courant et tension pour une inductance L

et donc

$$I\,(t) = I_0\,\sin\,(\omega t) = I_0\,\operatorname{Im} e^{i\,\omega t}$$

On arrive à

$$\begin{aligned}
V\,(t) &= R\,I_0\,\operatorname{Im} e^{i\,\omega t} && \text{résistance } R\\
V\,(t) &= \frac{1}{\omega\,C}\,I_0\,\operatorname{Im} e^{i\,(\omega t-\pi/2)} && \text{capacité } C\\
V\,(t) &= \omega\,L\,I_0\,\operatorname{Im} e^{i\,(\omega t+\pi/2)} && \text{inductance } L
\end{aligned}$$

Utiliser $e^{-\pi/2} = -i = 1/i$ et $e^{\pi/2} = i$ pour vérifier que

$$\begin{aligned}
V\,(t) &= R\,I\,(t) && \text{résistance } R\\
V\,(t) &= \frac{1}{i\,\omega\,C}\,I\,(t) && \text{capacité } C\\
V\,(t) &= i\,\omega\,L\,I\,(t) && \text{inductance } L
\end{aligned}$$

Avec les formules ci–dessus la définition de l'**impédance complexe** est naturelle

$$\begin{aligned}
Z &= R && \text{résistance } R\\
Z &= \frac{1}{i\,\omega\,C} && \text{capacité } C\\
Z &= i\,\omega\,L && \text{inductance } L
\end{aligned}$$

L'impédance complexe Z joue la rôle de la résistance R dans la loi de Ohm $U = R\,I$ pour un courant alternatif et des résistance, capacitance et inductance et les courant et tension complexe

$$U\,(t) = Z\,I\,(t)$$

La vrai tension et courant sont données comme partie réells ou imaginaire des expression complexes.

2–33 Exemple : (élément LRC)
Mettre trois éléments en série (voir figure 2.11) et appliquer un courant

$$I\,(t) = I_0\ \sin\,(\omega\,t) = I_0\ \operatorname{Im}\,e^{i\,\omega\,t}$$

La tension (complexe) sur les trois éléments est donné par

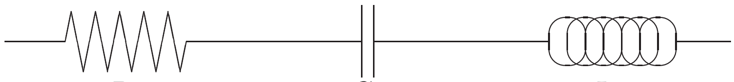


Figure 2.11: élément LRC

$$V\,(t) = (R + \frac{1}{i\,\omega\,C} + i\,\omega\,L)\ I\,(t) = Z\ I\,(t)$$

L'**impédance** est

$$|Z| = \left|R + \frac{1}{i\,\omega\,C} + i\,\omega\,L\right| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{-1}{\omega\,C} + \omega\,L\right)^2}$$

et la **phase** ϕ par

$$\tan\phi = \frac{\omega\,L - 1/(\omega C)}{R}$$

Puis on arrive à la tension réelle

$$V\,(t) = \operatorname{Im}\,(Z\,I\,(t)) = I_0\ |Z|\ \operatorname{Im}e^{i\,(\omega\,t+\phi)} = I_0\ |Z|\ \sin(\omega\,t+\phi)$$

Considérer

$$\begin{aligned} I\,(t) &= \ = I_0\ \sin(\omega\,t) \\ V\,(t) &= \ = I_0\ |Z|\ \sin(\omega\,t+\phi) \end{aligned}$$

Donc l'impédance $|Z|$ est un facteur d'amplification et $\phi = \arg Z$ est la phase. L'impédance dépend de ω

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{-1}{\omega\,C} + \omega\,L\right)^2}$$

et on obtient la valeur minimal si

$$\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C} = 0$$

Veut dire pour

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

Pour cette fréquence l'amplitude de la tension est maximale et la phase est zéro. ♢

2–34 Exemple : Examiner le circuit en figure 2.12. On peut calculer avec des impédance comme avec des résistance, mais avec des nombres complexes. L'impédance complexe Z est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/(i\,\omega\,C)} = \frac{1}{R} + i\,\omega\,C \\ Z &= \frac{R}{1+i\,\omega\,R\,C} = \frac{R}{1+(\omega\,R\,C)^2}\ (1 - i\,\omega\,R\,C) \end{aligned}$$

et donc

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1+(\omega\,R\,C)^2}} \quad \text{et} \quad \arg Z = \tan\phi = -\omega\,R\,C$$

♢

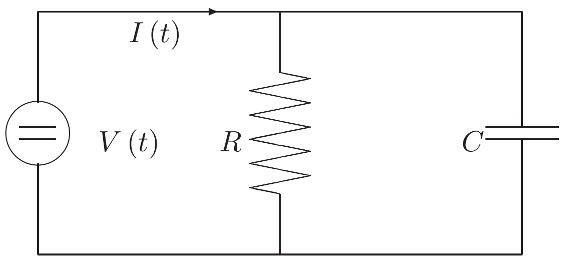


Figure 2.12: résistance et capacitance en parallel

2.7 problèmes

• **Problème 2–1:**
Pour $a = 3 + i\,2$ et $b = 4 - i$ calculer $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b , b/a, $|a|$, $|b|$, $|a \cdot b|$ et $|a + b|$.

• **Problème 2–2:**
Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$

(a) $z + (1 - i) = 3 + 2\,i$

(b) $-5\,z = 5 + 10\,i$

(c) $(i - z) + (2\,z - 3\,i) = -2 + 7\,i$

• **Problème 2–3:**
Soit $z_1 = 2 + 3\,i$, $z_2 = -2 + 3\,i$, $z_3 = \sqrt{8}\,e^{i\,\pi/4}$. Calculer les expression suivantes **exactes** et simplifier.

(a) $|\,z_1 + z_2\,|$

(b) $z_1 \cdot z_2$

(c) $z_1 \cdot z_3$

(d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

• **Problème 2–4:**
Pour chaque souproblème trouver $z_1 \cdot z_2$, z_1^2 et z_2^2

(a) $z_1 = 3\,i$ et $z_2 = 1 - i$

(b) $z_1 = 4 + 6\,i$ et $z_2 = 2 - 3\,i$

(c) $z_1 = \frac{1}{3}\,(2 + 4\,i)$ et $z_2 = \frac{1-5\,i}{2}$

• **Problème 2–5:**
Résoudre

$$z^2 + 2\,z + 2 = 0$$

et vérifier votre solution.

• **Problème 2–6:**
Résoudre

$$2\,z^2 - 2\,z + 2 = 0$$

et vérifier votre solution.

• **Problème 2–7:**
Calculer i^{123443} **sans** calculatrice.

• **Problème 2–8:**
Résoudre pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcrcr} i\,z_1 & - & i\,z_2 & = & -2 \\ 2\,z_1 & + & z_2 & = & i \end{array}$$

• **Problème 2–9:**
Résoudre pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcrcr} z_1 & + & z_2 & = & 2 \\ z_1 & - & z_2 & = & i\,2 \end{array}$$

• **Problème 2–10:**
Dans le plan complexe dessiner tous les nombres z tel que $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Im}\, z$.

• **Problème 2–11:**
Dans le plan complexe dessiner tous les nombres z tel que $|\,\mathrm{Re}\, z| > |\,\mathrm{Im}\, z|$.

• **Problème 2–12:**
Trouver tous les solution de $z^4 = 1$ et dessiner ces solutions dans un plan complexe.

• **Problème 2–13:**
Trouver tous les solution de $z^3 = -8$ et dessiner ces solutions dans un plan complexe.

• **Problème 2–14:**

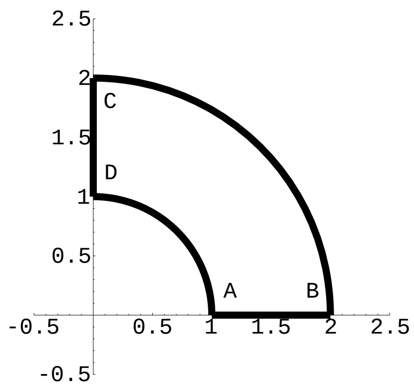
(a) Soit $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \cdot z_2$ d'une façon **exacte** (sans calculatrice).

(b) Soit $G \subset \mathbb{C}$ le deuxième quadrant dans le plan complexe, c.-à-d. les nombres $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ avec $x < 0$ et $y > 0$. Calculer les racines de tous ces nombres en G et dessiner cette nouveau domaine.

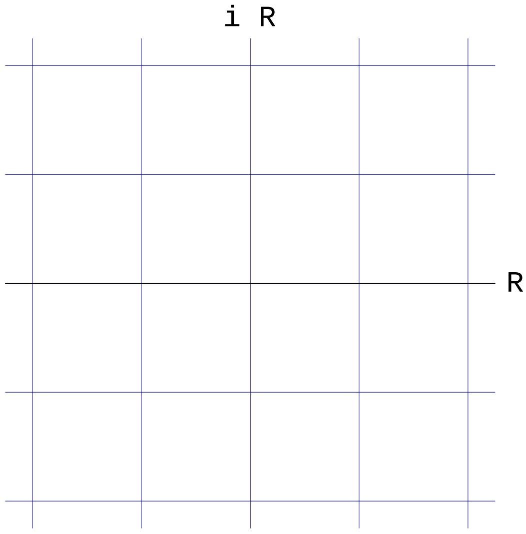
• **Problème 2–15:**
Examiner la section de l'anneau ci-dessous avec les quatres points A, B, C et D dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Chaque point $z \in \mathbb{C}$ est transformé par une application complexe $z \mapsto f(z)$. Esquisser les images de la section de l'anneau. Indiquer les images des points A, B, C et D.

(a) pour $f(z) = z^2$, cet-à-dire $z \mapsto z^2$

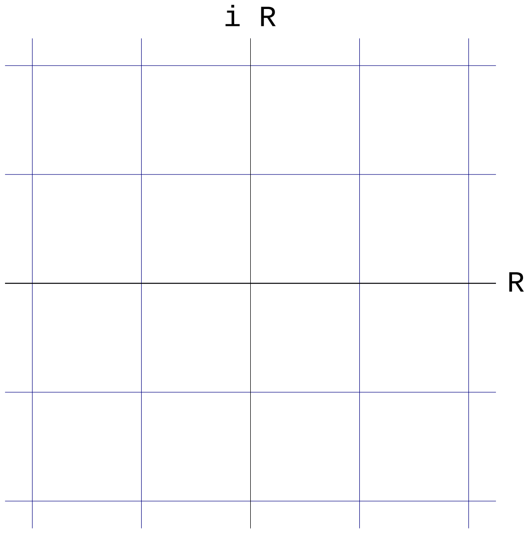
(b) pour $f(z) = 1/z^2$, cet-à-dire $z \mapsto \frac{1}{z^2}$



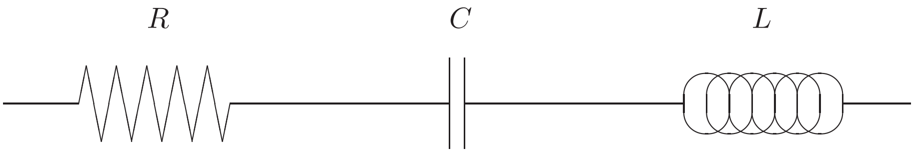
(a)



(b)



• Problème 2–16:
Mettre trois éléments en série. Les valeurs de R, C et L sont données.

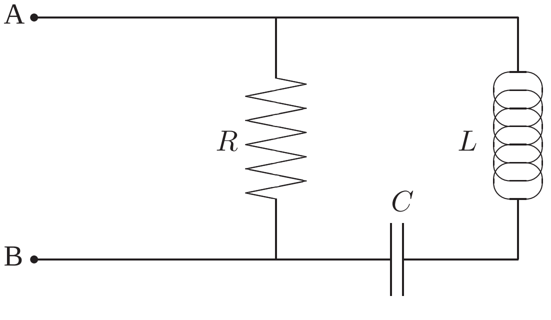


(a) Trouver l'impédance complexe Z comme fonction de ω.

(b) Pour quel valeur de ω ce circuit rend une déphasage de 0?

(c) Pour quel valeur de ω l'impédance $|Z|$ est minimale? Trouver cette valeur minimale.

• Problème 2–17:
Examiner le circuit ci–dessous et trouver l'impédance Z entre les points A et B. Rendre le résultat dans la forme $Z = R_{eq} + i\,\omega\, L_{eq}$. Tip: trouver d'abord $\frac{1}{Z}$.

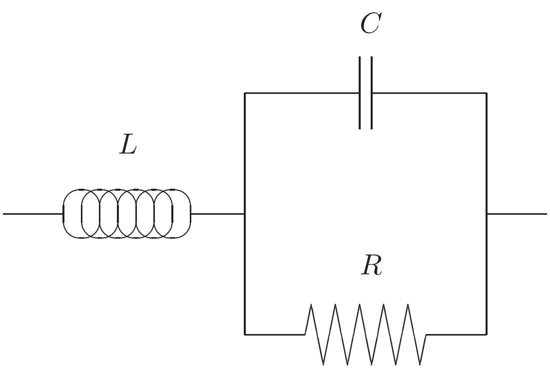


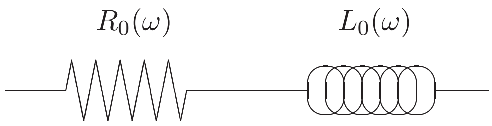
• Problème 2–18:
Examiner le circuit ci-dessous (à gauche) et trouver l'impédance Z. Pour un courrant alternativ avec fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ le circuit peut être remplacé par deux élements en série: une résistance $R_0(\omega)$ et une bobine avec inductance $L_0(\omega)$.

(a) Calculer $Z(\omega)$

(b) Calculer $R_0(\omega)$

(c) Calculer $L_0(\omega)$





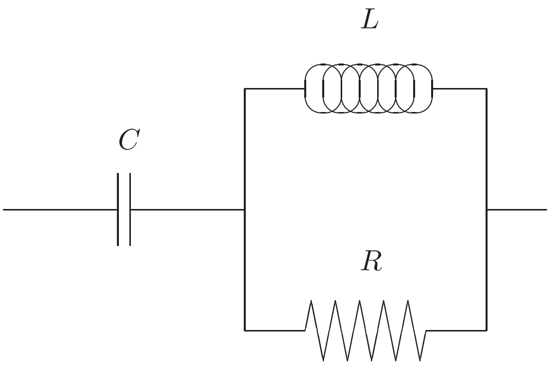
• **Problème 2–19:**
Examiner le circuit ci-dessous (à gauche) et trouver l'impédance Z. Pour un courrant alternativ avec fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ le circuit peut être remplacé par deux élements en série: une résistance $R_0(\omega)$ et une capacité $C_0(\omega)$.

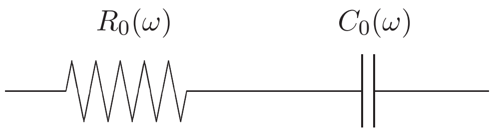
(a) Calculer $Z(\omega)$

(b) Calculer $R_0(\omega)$

(c) Calculer $C_0(\omega)$

Tip: $Z = R$, $Z = \frac{1}{i\,\omega\,C}$, $Z = i\,\omega\,L$





• **Problème 2–20:**
Exprimer $\cos(4\,\alpha)$ en terme de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$. Trouver et prouver cette identité.
Tip: formule de Euler et

$$(x+y)^4 = x^4 + 4\,x^3\,y + 6\,x^2\,y^2 + 4\,x\,y^3 + y^4$$

• **Problème 2–21:**

(a) Utiliser deux fois l'équation

$$1 - e^{i\,k} = e^{i\,\frac{k}{2}}\,\left(e^{-i\,\frac{k}{2}} - e^{i\,\frac{k}{2}}\right) = -2\,i\,e^{i\,\frac{k}{2}}\,\sin\left(\frac{k}{2}\right)$$

avec des valeurs différentes de k, pour réécrire la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i\,k\,\alpha}$$

comme fraction de deux termes simples. Le dénominateur doit être réel.

(b) À l'aide du résultat (a) trouver la formule

$$\sin\,\alpha + \sin\,(2\,\alpha) + \sin\,(3\,\alpha) + \ldots + \sin\,(n\,\alpha) = \frac{\sin\,(\frac{n}{2}\alpha)\ \sin\,(\frac{n+1}{2}\,\alpha)}{\sin\,(\frac{\alpha}{2})}$$

2.7.1 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 2–2 : $z = 2 + 3\,i$, $z = -1 - 2\,i$ et $z = -2 + 9\,i$

Solution pour problème 2–3 :

$$z_3 = \sqrt{8}\,e^{i\,\pi/4} = 2\,\sqrt{2}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} = 2\,(1+i) = 2 + 2\,i$$

(a)

$$|\,z_1 + z_2\,| = |\,6\,i\,| = 6$$

(b)

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3\,i)\,(-2 + 3\,i) = -13$$

(c)

$$z_1 \cdot z_3 = \ldots = -2 + 10\,i$$

(d)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3\,i)\,(-2-3\,i)}{(-2+3\,i)\,(-2-3\,i)} = \frac{5 - 12\,i}{13}$$

Solution pour problème 2–4 :

(a) $z_1 \cdot z_2 = 3 + 3\,i$, $z_1^2 = -9$ et $z_2^2 = -2\,i$

(b) $z_1 \cdot z_2 = 26$, $z_1^2 = -20 + 48\,i$ et $z_2^2 = -5 - 12\,i$

(c) $z_1 \cdot z_2 = \frac{11-33\,i}{3}$, $z_1^2 = \frac{4}{9}\,(-3 + 4\,i)$ et $z_2^2 = -6 - i\,\frac{5}{2}$

Solution pour problème 2–5 : $-1 + i$ et $-1 - i$

Solution pour problème 2–6 : $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution pour problème 2–7 : $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, et donc $i^{4\,k} = 1$ pour $k \in \mathbb{N}$. Puis

$$i^{123443} = i^{123440} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$$

Solution pour problème 2–8 : $z_1 = i$ et $z_2 = -i$

Solution pour problème 2–9 : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

Solution pour problème 2–10 : Demi–plan au dessous la droite à 45° par l'origine, sans la droite.

Solution pour problème 2–11 : Une cône ouvert vers la droite et la gauche.

Solution pour problème 2–12 : $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ et $z_4 = -i$.

Solution pour problème 2–13 :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \\ z_2 &= -2 \\ z_3 &= 2\,(\cos\frac{5\,\pi}{3} + i\sin\frac{5\,\pi}{3}) = 2\,(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

Solution pour problème 2–14 :

(a) Wegen

$$z_2 = e^{i\,3\pi/2} = \cos\frac{3\,\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\,\pi}{2} = -i$$

gilt

$$z_1 + z_2 = 2 + 2\,i$$

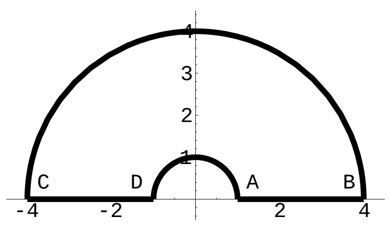
und

$$z_1 \cdot z_2 = -i\,(2 + 3\,i) = 3 - 2\,i$$

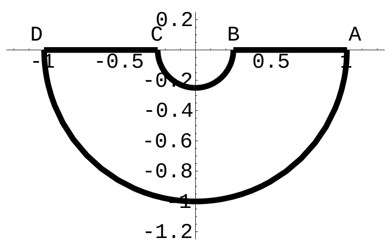
(b) Der zweite Quadrant besteht aus allen komplexen Zahlen beliebigen Beträgen und Arumententen zwischen $\pi/2$ und π. Durch das Bestimmen der Wurzel werden diese Argumente halbiert und man erhält somit Argumente zwischen $\pi/4$ und $\pi/2$. Als neuer Bereich entsteht somit der Teil der ersten Quadranten oberhalb der 45°–Geraden.

Solution pour problème 2–15 :

(a) Die Abbildung $z \mapsto z^2$ hat die folgenden Effekte:
- die Beträge werden quadriert, weil $|z^2| = |z|^2$. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem inneren Kreis (Radius 1) auf dem Kreis mit Radius 1. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem äusseren Kreis (Radius 2) auf dem Kreis mit Radius 4.
- die Argumente werden verdoppelt, weil $\arg z^2 = 2\,\arg z$. Somit gehen die Winkel neu von 0 bis zu π, statt von 0 bis zu $\pi/2$.



(b) Die Abbildung $z \mapsto 1/z^2$ hat die folgenden Effekte:
- die inversen Beträge werden quadriert, weil $|1/z^2| = |z|^{-2}$. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem inneren Kreis (Radius 1) auf dem Kreis mit Radius 1. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem äusseren Kreis (Radius 2) auf dem Kreis mit Radius 1/4.
- die Argumente wechseln das Vorzeichen und werden verdoppelt, weil $\arg 1/z^2 = -2\,\arg z$. Somit gehen die Winkel neu von 0 bis zu π, statt von 0 bis zu $-\pi/2$.



Solution pour problème 2–16 :

(a)

$$Z = R + \frac{1}{i\,\omega\,C} + i\,\omega\,L = R + i\,\left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)$$

(b) Die Phasenverschiebung ist gegeben durch das Argument von Z

$$\tan\arg Z = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}}{R}$$

Somit ist $\arg Z = 0$ falls

$$\begin{aligned} \omega\,L - \frac{1}{\omega\,C} &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{1}{L\,C} \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{L\,C}} \end{aligned}$$

(c) Der erste Term der Impedanz

$$|Z|^2 = R^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2$$

ist unabhängig von ω. Deshalb wird $|Z|$ ist minimal, falls der zweite Term Null ist, d.h. für

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\,C}}$$

Der minimale Wert ist offensichtlich gegeben durch R .

Solution pour problème 2–17 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{i\,\omega\,L + 1/(i\,\omega\,C)} = \frac{1}{R} + \frac{i\,\omega\,C}{-\omega^2\,CL + 1} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{i\,\omega\,C}{1 - \omega^2\,CL} = a + i\,b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{a + i\,b} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \frac{\omega^2\,C^2}{(1 - \omega^2\,CL)^2}}\,\left(\frac{1}{R} - \frac{i\,\omega\,C}{1 - \omega^2\,CL}\right) \\ &= \frac{R^2\,(1 - \omega^2\,CL)^2}{(1 - \omega^2\,CL)^2 + R^2\omega^2\,C^2}\,\left(\frac{1}{R} - \frac{i\,\omega\,C}{1 - \omega^2\,CL}\right) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{R^2\,(1 - \omega^2\,CL)^2}{(1 - \omega^2\,CL)^2 + R^2\omega^2\,C^2}\,\frac{1}{R} \\ L_{eq} &= -\frac{R^2\,(1 - \omega^2\,CL)^2}{(1 - \omega^2\,CL)^2 + R^2\omega^2\,C^2}\,\frac{C}{1 - \omega^2\,CL} \end{aligned}$$

Solution pour problème 2–18 :

(a) Der Widerstand R und die Kapazität C sind parallel geschaltet. Die Induktivität L ist dann in Serie geschaltet.

$$\begin{aligned}
Z(\omega) &= i\,\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + i\,\omega\, C} = i\,\omega L + \frac{R}{1 + i\,\omega\, RC} \\
&= i\,\omega L + \frac{R\,(1 - i\,\omega\, RC)}{1 + \omega^2\,(RC)^2} = \frac{R}{1 + \omega^2\,(RC)^2} + i\,\omega\,\left(L - \frac{R^2 C}{1 + \omega^2\,(RC)^2}\right) \\
&= R_0(\omega) + i\,\omega\, L_0(\omega)
\end{aligned}$$

(b)

$$R_0(\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2\,(RC)^2}$$

(c)

$$L_0(\omega) = L - \frac{R^2 C}{1 + \omega^2\,(RC)^2}$$

Solution pour problème 2–19 :

(a) Der Widerstand R und die Induktivität L sind parallel geschaltet. Die Kapazität C ist dann in Serie geschaltet.

$$\begin{aligned}
Z(\omega) &= \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\,\omega\, L}} = \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{i\,\omega\, L\, R}{i\,\omega\, L + R} = \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{i\,\omega\, L\, R\,(R - i\,\omega\, L)}{(i\,\omega\, L + R)\,(R - i\,\omega\, L)} \\
&= \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{i\,\omega\, L\, R^2 + \omega^2\, L^2\, R}{R^2 + \omega^2\, L^2} = \frac{\omega^2\, L^2\, R}{R^2 + \omega^2\, L^2} + \frac{1}{i\,\omega}\left(\frac{1}{C} - \frac{\omega^2\, L\, R^2}{R^2 + \omega^2\, L^2}\right) \\
&= R_0(\omega) + \frac{1}{i\,\omega\, C_0(\omega)}
\end{aligned}$$

(b) Bestimmt durch den Realteil von $Z(\omega)$

$$R_0(\omega) = \frac{\omega^2\, L^2\, R}{R^2 + \omega^2\, L^2}$$

(c) Bestimmt durch den Imaginärteil von $Z(\omega)$

$$C_0(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{C} - \frac{\omega^2\, L\, R^2}{R^2 + \omega^2\, L^2}} = \frac{C\,\left(R^2 + \omega^2\, L^2\right)}{(R^2 + \omega^2\, L^2) - \omega^2\, L\, R^2} = \frac{C\,\left(R^2 + \omega^2\, L^2\right)}{R^2 + \omega^2\, L\,(L - R^2)}$$

Für extreme Werte von ω können der Ersatzwiderstand und die Ersatzkapazität approximiert werden.

ω	$R_0(\omega)$	$\approx 1/C_0(\omega)$
sehr klein	≈ 0	$\frac{1}{C}$
sehr gross	$\approx R$	$\approx \frac{1}{C} - \frac{R^2}{L}$

Solution pour problème 2–20 :

$$\begin{aligned}
\cos\,(4\,\alpha) + i\ \sin\,(4\,\alpha) &= e^{i\,4\,\alpha} = \left(e^{i\,\alpha}\right)^4 = (\cos\,(\alpha) + i\ \sin\,(\alpha))^4 \\
&= \cos^4\ \alpha + i\ 4\ \cos^3\ \alpha\ \sin\,\alpha - 6\ \cos^2\ \alpha\ \sin^2\ \alpha \\
&\quad -i\,4\cos\ \alpha\ \sin^4\ \alpha + \sin^4\ \alpha \\
&= \cos^4\ \alpha - 6\ \cos^2\ \alpha\ \sin^2\ \alpha + \sin^4\ \alpha \\
&\quad +i\ \left(4\ \cos^3\ \alpha\ \sin\,\alpha - 4\cos\ \alpha\ \sin^4\ \alpha\right)
\end{aligned}$$

Nun ist nur der Realteil zu berücksichtigen und man erhält.

$$\cos(4\,\alpha) \;=\; \cos^4\,\alpha - 6\,\cos^2\,\alpha\,\sin^2\,\alpha + \sin^4\,\alpha$$

Aus dem Imaginärteil könnte man auch ablesen, dass

$$\sin(4\,\alpha) \;=\; 4\,\cos^3\,\alpha\,\sin\,\alpha - 4\cos\,\alpha\,\sin^4\,\alpha$$

Solution pour problème 2–21 :

(a) Es handelt sich um eine geometrische Summe

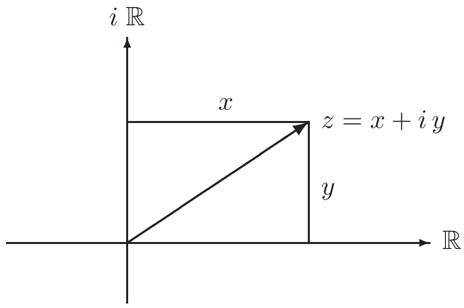
$$\sum_{k=0}^{n} a\,q^k = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{i\,n\,\alpha} = \frac{1-e^{i\,(n+1)\alpha}}{1-e^{i\,\alpha}} \\ &= \frac{-2\,i\,e^{i\,\frac{n+1}{2}\,\alpha}\,\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\alpha\right)}{-2\,i\,e^{i\,\frac{\alpha}{2}}\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{i\,\frac{n+1}{2}\,\alpha}\,\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\alpha\right)}{e^{i\,\frac{\alpha}{2}}\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{i\,\frac{n}{2}\,\alpha}\,\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

(b) Der Imaginärteil der obigen Formel liefert das gewünschte Resultat.

2.8 formulaire pour les nombres complexe

2.8.1 définitions de base



$z = x+iy = re^{i\varphi}$ avec un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$
et des nombres réels $x, y, r, \varphi \in \mathbb{R}$.
x est la partie réelle de z.
y est la partie imaginaire de z.
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la norme de z.
φ est l'argument de z si $\tan\varphi = y/x$.
$i = \sqrt{-1}$ et $i^2 = -1$.

2.8.2 propriétés et règles de calcul

$z = |z|e^{i\varphi} = |z|\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$
$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$
$\lambda z = \lambda x + i\lambda y$ avec un nombre réel λ.
$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1) = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$1/z = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$
$z_1/z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
$\bar{z} = z^* = x - iy$ est le complexe conjugué de z
$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$
$z^n = |z|^n e^{in\varphi}$, $e^{2\Pi i} = 1$, $e^{Pii} = -1$
$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$
$e^{iny} = (\cos y + i\sin y)^n = \cos{(ny)} + i\sin{(ny)}$
Les solutions de $z^n = 1$ sont données par $z_k = e^{i2\Pi\frac{k}{n}}$ $\quad k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2.9 récapitulation

Après ce chapitre on doit

- connaître les connections entres les nombres réels et complexes.
- maîtriser les opérations élémentaire avec des nombres complexes, d'une façon algebraique et géométrique.
- connaître les notations des impédances complexes pour résistance, capacité et inductance.

Chapitre 3

Vecteurs et matrices

3.1 introduction

Dans ce chapitre on introduit des vecteurs et des matrices avec les opérations arithmétiques. Les applications des vecteurs et matrices vont suivre dans les chapitres suivantes.

3.2 vecteurs

Un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ et aussi dit un **scalaire**. Toutes opérations dans ce chapitre peut être fait avec des scalaire complexes $\alpha \in \mathbb{C}$. On y renonce.

3–1 Définition : Un **vecteur** $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ consiste de n scalaires $v_i \in \mathbb{R}$. Représenter des vecteurs comme colonne des nombres.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Les scalaires v_i sont aussi dit **composantes** du vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

3–2 Exemple : Voila quelques vecteurs en $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ e \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.314 \\ -47 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\diamondsuit$

Dans ce cours on travaille presque exclusivement avec des vecteurs de colonne, mais il existe des situation pour lesquelles les vecteurs de lignes seront plus pratiques.

3–3 Définition : Si on transforme un vecteurs de colonne dans un vecteur de ligne on parle du **vecteur transposé** et on écrit $\vec{a}^T$ ou $\vec{a}^*$.

3–4 Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1\,,\,2\,,\,3) \quad \text{et} \quad (0.2\,,\,-2\,,\,3\,,\,0)^T = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

♢

3.2.1 addition et multiplications avec un scalaire

3–5 Définition :

- On fait l'**addition** de deux vecteurs en faisant l'addition composantes par composante. On a donc

$$\vec c = \vec a + \vec b \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_i = a_i + b_i \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le n$$

ou aussi

$$\vec c = \vec a + \vec b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

- Un vecteur $\vec a \in \mathbb{R}^n$ est **multiplié par un scalaire** $\alpha \in \mathbb{R}$ en multipliant chaque composante par α. On a donc

$$\vec b = \alpha\,\vec a \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_i = \alpha\,a_i \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le n$$

ou aussi

$$\vec b = \alpha\,\vec a = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,a_1 \\ \alpha\,a_2 \\ \vdots \\ \alpha\,a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Observer qu'on peut seulement appliquer l'addition pour des vecteurs de largeur identiques.

3–6 Résultat : *Les règles de calcul pour de nombres rends directement quelques règles de calcul pour des vecteurs.*

$\vec a + \vec b \;=\; \vec b + \vec a$	*loi de commutativité*
$(\vec a + \vec b) + \vec c \;=\; \vec a + (\vec b + \vec c)$	*loi d'assoziativité*
$\alpha\,(\vec a + \vec b) \;=\; \alpha\,\vec a + \alpha\,\vec b$	*loi de distributivité*
$(\alpha + \beta)\,\vec a \;=\; \alpha\,\vec a + \beta\,\vec a$	*loi de distributivité*

3–7 Exemple : Les exemples simple ci–dessous montres qu'il y a pas de surprises pour l'addition des vecteurs et la multiplication avec des scalaires.

(a)

$$3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1 - 3\cdot 0 \\ 7\cdot 2 - 3\cdot 1 \\ 7\cdot 3 - 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 27 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \quad \text{ne pas définit}$$

$\diamondsuit$

3–8 Exemple : La majorité des nouvelles calculatrice de poche savent calculer avec des vecteurs et matrices. C'est votre tache d'utiliser les calculatrice d'une façon efficace et raisonnable. Utiliser *Octave* pour l'exemple précédente.

Octave

```
3*[3; 2; 1]
[2; -1] + [4; 0] - [1; 1]
7*[1; 2; 3] - 3*[0; 1; -2]
[2; -1] + [ 1; 0; 2]
```

Octave va calculer et afficher les trois premiers résultats et puis montrer un message d'erreur pour la quatrième calculation. $\diamondsuit$

3.2.2 la norme d'un vecteur et le produit scalaire de deux vecteurs

La notion de longueur d'un vecteur dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$ s'applique aussi aux vecteurs $\vec{a} \in \mathbb{R}$.

3–9 Définition : La **norme** d'un vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}$ est donné par

$$\|\vec{a}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \quad \text{ou} \quad \|\vec{a}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

3–10 Exemple : On obtien

$$\|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\|^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \quad \text{ou} \quad \|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\| = \sqrt{10}$$

$\diamondsuit$

3–11 Définition : On peut multiplier deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Le résultat est un scalaire en $\mathbb{R}$ et cette opération est dit **produit scalaire** des deux vecteurs. On utilise

$$\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle = \vec{a}^T \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

Si le contexte du problème indique que seulement un produit scalaire est possible on ose simplifier la notation et écrire

$$\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

3–12 Théorème : *On a les règles de calcul suivantes*

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	*loi de commutativité*
$(\lambda\, \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\, \vec{b}) = \lambda\, (\vec{a} \cdot \vec{b})$	*pour* $\lambda \in \mathbb{R}$
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$	*loi de distributivité*
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a}$ *orthogonal à* $\vec{b}$	*orthogonalité*
$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}\,,\, \vec{a} \rangle} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$	

3–13 Résultat : *Pour toutes vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ *on a l'inégalité de* ***Cauchy*** *et* ***Schwarz***

$$|\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

Démonstration : Si un des deux vecteurs est $\vec{0}$ puis le résultat est évidant. Pour des vecteurs quelconques $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ choisissons

$$\alpha = \sqrt{\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}} \quad \text{et} \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}} = \frac{\pm 1}{\alpha}$$

Le signe de β est déterminé par le signe de $-\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle$. Puis on utilise l'inégalité

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\alpha\, \vec{a} + \beta \vec{b}\|^2 = \langle \alpha\, \vec{a} + \beta \vec{b}\,,\, \alpha\, \vec{a} + \beta \vec{b} \rangle \\ &= \alpha^2\, \|\vec{a}\|^2 + 2\, \alpha\, \beta\, \langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle + \beta^2 \|\vec{b}\|^2 \\ &= \|\vec{b}\|\, \|\vec{a}\| \pm 2\, \frac{\alpha}{\alpha}\, \langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle + \|\vec{a}\|^2\, \|\vec{b}\| \\ &= 2\, \|\vec{b}\|\, \|\vec{a}\| - 2\, |\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle| \end{aligned}$$

pour conclure

$$|\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

$\square$

Pour des vecteurs en $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ on sait que

$$\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\;\cos\angle(\vec{a}\,\vec{b})$$

pour des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ on **définit** l'angle γ entre les vecteurs par l'équation

$$\cos\gamma = \frac{\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$$

Si $\vec{n}$ est un vecteur de longueur 1 puis on trouve

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \|\vec{a}\|\cos\,\angle(\vec{a},\vec{n})$$

La Figure 3.1 montre pourquoi $\vec{a}\cdot\vec{n}$ est dit la **composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$** . On parle de la **projection** de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$. Cette résultat est utile pour beaucoup des applications. Examiner Problème 3–3 (page 86).

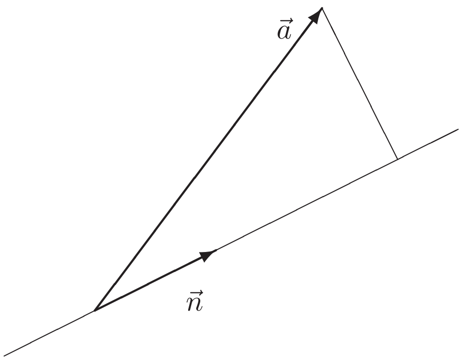


Figure 3.1: composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$

3.2.3 le produit vectorielle en $\mathbb{R}^3$

Le produit **scalaire** de deux vecteurs rend un scalaire comme résultat. Le **produit vectorielle** de deux vecteurs rend un vecteur comme résultat. Observer que cette construction est seulement possible en $\mathbb{R}^3$.

3–14 Définition : Pour les coordonnées cartésienne on trouve

$$\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2\\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3\\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1\end{pmatrix}$$

3–15 Résultat :
Pour deux vecteurs $\vec{a}\,,\,\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ le produit vectorielle $\vec{a}\times\vec{b}$ est un vecteur caractérisé par

(1) $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\;\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

(2) $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont perpendiculaire à* $\vec{a}\times\vec{b}$

(3) *les vecteurs* $\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{a}\times\vec{b}$ *forme un* ***système droit***

L'angle doit être entre 0 *et* π .

3–16 Résultat : *Pour deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ on arrive à*

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \; \|\vec{b}\| \; \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \textit{ aire du parallélogramme}$$

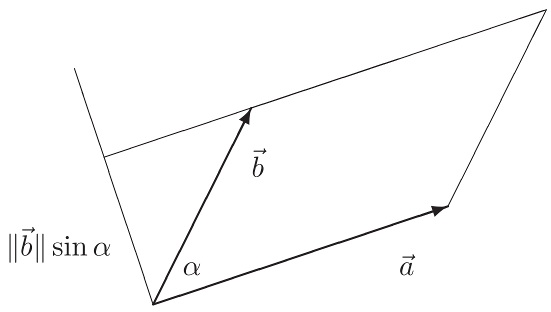


Figure 3.2: produit vectorielle et parallélogramme

Démonstration : Figure 3.2 montre que la hauteur du parallélogramme est donné par $h = \|\vec{b}\| \sin \alpha$ et donc l'aire du parallélogramme est égal au produit de hauteur et largeur

$$\|\vec{a}\| \; \|\vec{b}\| \; \sin \alpha = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

$\square$

3–17 Résultat : *Les règles de calcul du produit vectorielle montre que pour des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on trouve des règles suivantes.*

a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ *et* $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

b) $\lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda \, \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \, \vec{b}\right)$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ *ou* $\vec{b} = \vec{0}$ *ou* $\vec{a}$ *est perpendiculaire à* $\vec{b}$.

d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *(loi de distributivité)*

3–18 Remarque : Utilisant la notation d'une **déterminant** il existe une aide mémoire pour le produit vectorielle

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_y & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_z & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\
&= \vec{e}_x \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} - \vec{e}_y \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} + \vec{e}_z \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= \vec{e}_x \, (a_2 \, b_3 - a_3 \, b_2) + \vec{e}_y \, (a_3 \, b_1 - a_1 \, b_3) + \vec{e}_z \, (a_1 \, b_2 - a_2 \, b_1)
\end{aligned}$$

Figure 3.3 peut aider pour mémoriser. $\diamondsuit$

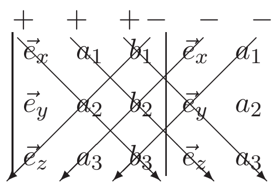


Figure 3.3: aide mémoire pour le produit vectorielle

3–19 Exemple : On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)\cdot(-3) - 4\cdot 1 \\ -2\cdot(-3) + 4\cdot 0.5 \\ 2\cdot 1 - (-3)\cdot 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

On peut aussi calculer avec *Octave*.

Octave

```
a=[2;-3;4]
b=[0.5;1;-3]
cross(a,b)
-->
ans =
    5.0000
    8.0000
    3.5000
```

◊

3.3 matrices

Dans cette section examinons des matrices et les opération arithmetiques de base.

3.3.1 définition et opération de base

3–20 Définition : Une **matrice** de largeur $n \times m$ consiste de n lignes et m colonnes des nombres. On écrit $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ ou

$$\mathbf{A} = (a_{i,j}) = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Si la nombre des lignes est égal au nombe de colonne on parle d'une **matrix carrée**.

- On peut additionner des matrice de largeur identiques et on le fait élément par élément.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ c_{i,j} &= a_{i,j} + b_{i,j} \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

  Évidemment cette opération est commutative, veut dire $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. On ne peut **pas** additionner des matrices de largeur différentes.

- On peut multiplier une matrice $\mathbf{A}$ avec un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ en multipliant chaque élément avec λ.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \lambda\,\mathbf{A} \\ c_{i,j} &= \lambda\,a_{i,j} \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

3–21 Remarque : Un **vecteur de colonne** avec n composantes peut être regarder comme matrice de largeur $n \times 1$. Un **vecteur de ligne** avec m composantes peut être regarder comme matrice de largeur $1 \times m$. Puis les définitions de addition des vecteurs et matrices coïncide. ♢

3–22 Exemple : Pour les 2×3 matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

on a

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ \pi & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$3\,\mathbf{A} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3\,\pi & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

♢

3–23 Exemple : Examiner les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Puis on trouve

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Les operations $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ et $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ **ne sont pas définit**. ♢

3.3.2 multiplication des matrices

3–24 Définition : La **multiplication** des matrices n'est pas autant simple que l'addition. Le produit d'une matrice $n \times m$ $\mathbf{A}$ avec une matrice $m \times k$ $\mathbf{B}$ rend une matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ de largeur $n \times k$. La nombre k des colonnes de $\mathbf{A}$ doit être égal au nombre k des lignes de $\mathbf{B}$. Les composantes du résultat sont données par

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \cdot b_{l,j}$$

Il y a des façon différentes de mémoriser cette formule.

- Pour obtenir $c_{i,j}$ (ligne i et colonne j-te) du produit $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ calculer le produit de la i-ième ligne de $\mathbf{A}$ (comme vecteurs) avec la j-ième colonne de $\mathbf{B}$.

- Utiliser le schéma de **Falk** montrer en Figure 3.4. Suivant les flèches multiplier les nombres en $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et puis additionner. Pour les nombres des lignes et colonnes on trouve

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{B} & = & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ n\times m & \cdot & m\times k & \longrightarrow & n\times k \end{array}$$

- Le schéma de Falk met en évidance q'on peut calculer une composante $c_{i,j}$ de $\mathbf{C}$ sans calculer tous les nombres du produit $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

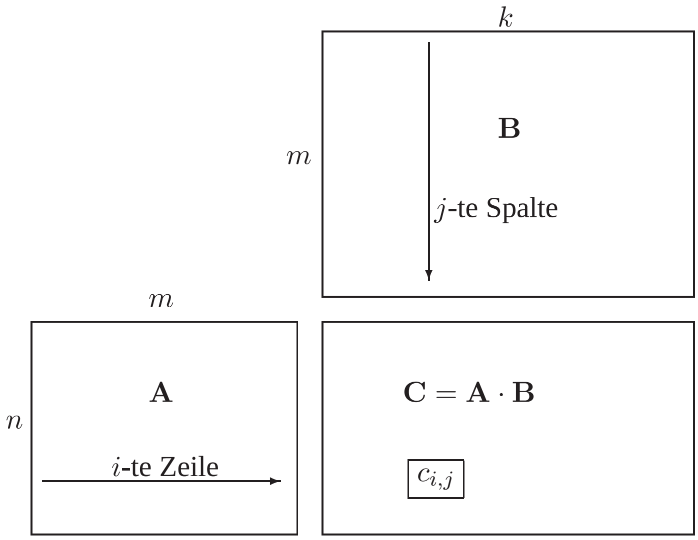


Figure 3.4: multiplication de deux matrices, schéma de Falk

3–25 Exemple : Multiplier la matrice $\mathbf{A}$ de largeur 3×2 avec la matrice $\mathbf{B}$ de largeur 2×3 rend une matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ de largeur 3×3–Matrix.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 3\cdot 4 & 2\cdot 2 - 3\cdot 5 & 2\cdot 3 - 3\cdot 6 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 4 & 1\cdot 2 + 0\cdot 5 & 1\cdot 3 + 0\cdot 6 \\ -2\cdot 1 - 1\cdot 4 & -2\cdot 2 - 1\cdot 5 & -2\cdot 3 - 1\cdot 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -10 & -11 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & -9 & -12 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Avec *Octave* on calcul directement avec des matrices. Le programme est très similaire à *Matlab*, dont le nom se base sur **Mat**rix **Lab**oratory.

Octave

```
A=[2,-3;1, 0; -2;-1]; B=[1,2,3; 4,5,6];
A*B
-->
ans =
  -10  -11  -12
    1    2    3
   -6   -9  -12
```

Pour cette exemple on peut aussi calculer le produit $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ et le résultat est une matrice de largeur 2×2.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot(-2) & 1\cdot(-3)+2\cdot 0+3\cdot(-1) \\ 4\cdot 2+5\cdot 1+6\cdot(-2) & 4\cdot(-3)+5\cdot 0+6\cdot(-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & -18 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ou avec *Octave*

Octave

```
B*A
-->
ans =
   -2   -6
    1  -18
```

Cette exemple simple met en évidance que la multiplication des matrices **n'es pas commutative**. ♢

3–26 Définition : A partir d'une matrice $n\times m$ $\mathbf{A}$ on construit la **transposée de la matrice** $\mathbf{A}^T$ en utilisant les lignes de $\mathbf{A}$ comme colonnes en $\mathbf{A}^T$ et les colonnes de $\mathbf{A}$ comme lignes en $\mathbf{A}^T$. La première ligne de $\mathbf{A}$ devient la première colonne de $\mathbf{A}^T$. Donc $\mathbf{A}$ est de largeur $m\times n$. On utilise les notations $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}^{tr}=\mathbf{A}'$.

3–27 Exemple : Pour la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

la transposée de la matrice est donnée par

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{tr} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

♢

3–28 Exemple : La transposé d'un vecteur de colonne est un vecteur de ligne. On peut donc écrire le produit scalaire comme produit des matrices dans la forme

$$\langle \vec{x}\,,\,\vec{y}\rangle = \vec{x}^T\cdot\vec{y} = (x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = x_1\,y_1+x_2\,y_2+x_3\,y_3+\ldots+x_n\,y_n$$

Les notations ne sont pas toujours utilisées d'une façon 100% correcte. Il faut aussi tenir compte du context du problème pour reconnaître les calculations correctes.

Comme conséquence simple on arrive aussi à

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1\,x_1+x_2\,x_2+x_3\,x_3+\ldots+x_n\,x_n = \vec{x}^T\cdot\vec{x} = \langle\vec{x}\,,\,\vec{x}\rangle$$

Cette exemple montre aussi que la multiplication des matrices n'est pas commutative.

$$\vec{y}\cdot\vec{x}^T = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\cdot(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & y_1x_3 & \ldots & y_1x_n\\ y_2x_1 & y_2x_2 & y_2x_3 & \ldots & y_2x_n\\ y_3x_1 & y_3x_2 & y_3x_3 & \ldots & y_3x_n\\ & \vdots & & & \vdots\\ y_nx_1 & y_nx_2 & y_nx_3 & \ldots & y_nx_n\end{bmatrix}$$

♢

3–29 Exemple : Multiplier une $n\times m$ matrice $\mathbf{A}$ avec un vecteurs $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$ en regardons le vecteur comme matrice de largeur $m\times 1$. Examiner l'exemple ci–dessous.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 0\\ 0\cdot 2-2\cdot 1+7\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ -2\end{pmatrix}$$

♢

3–30 Exemple : On peut réécrire un système des équations linéaire à l'aide d'une matrice et une multiplication d'une matrice avec un vecteur. Examiner l'exemple

$$\begin{array}{rrrcl} 1\,x & +1\,y & +2\,z & = & 9\\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1\\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0\end{array}$$

pour les trois unconnues x, y und z. Réécrire dans la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

avec les notations

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5\end{bmatrix}\quad,\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

on arrive à

$$\mathbf{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}$$

Il s'agit d'une application très importante des matrices. La nombre des lignes en $\mathbf{A}$ corresponds à la nombres des équations à résoudre et la nombre des colonnes représente la nombre des inconnues. $\diamondsuit$

Un système des équations linéaire, inhomogène

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3+ & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & b_1\\
a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}\,x_3+ & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & b_2\\
a_{31}\,x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}\,x_3+ & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & b_3\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+a_{m3}\,x_3+ & \ldots & +a_{mn}\,x_n & = & b_m
\end{array}$$

pour les n inconnues peut être réécrit comme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n}\\ & \vdots & & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

3.3.3 matrice inverse et systèmes des équations linéaires

3–31 Définition : Une matrice de largeur $n\times n$ avec des nombres 1 dans la diagonal et des hors de la diagonale est dit **matrice d'unité**. On utilise les notations $\mathbb{I}_n=\mathbf{E}_n$. Pour tout vecteurs $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ on a $\mathbb{I}_n\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

3–32 Exemple :

$$\mathbb{I}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad\mathbb{I}_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

3–33 Définition : Examiner une matrice $\mathbf{A}$ de largeur $n\times n$. une matrice $\mathbf{B}$ de largeur $n\times n$ avec

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbb{I}_n\quad\text{et}\quad\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbb{I}_n$$

La matrice $\mathbf{A}$ est dit **inversible** et la matrice $\mathbf{B}$ et la **matrice inverse**. On écrit $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$. On a donc les deux conditions

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbb{I}_n\quad\text{et}\quad\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbb{I}_n$$

3–34 Remarque : La définition ci–dessus implique directement que

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$$

$\diamondsuit$

3–35 Exemple : Verifier que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

sont des matrices inverse. $\diamondsuit$

3–36 Lemme : *Pour une matrice $\mathbf{A}$ inversible il existe une, et une seule, matrice inverse.*

Démonstration : Soit $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ deux matrices inverse de la matrice $\mathbf{A}$. Puis on utilise l'équation $\mathbb{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ et on peut multiplier de la gauche par $\mathbf{C}$ pour arriver à

$$\mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbb{I}_n = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbb{I}_n \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$$

$\square$

3–37 Résultat : *Pour une matrice $\mathbf{A}$ inversible on peut résoudre le système des équations linéaires*

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Multiplier l'equation par $\mathbf{A}^{-1}$ de la gauche pour arriver à

$$\vec{x} = \mathbb{I}_n \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$$

La valeur du résultat ci–dessus est plutôt théorique que pratique. Pour les problèmes appliqués il est rarement nécessaire de trouver la matrice inverse. On peut résoudre les systèmes linéaire d'une façon plus efficace, veut dire avec moins de calculations. La différence importe pour des systèmes grands. On va examiner ces algorithmes en chapitre 5.

3–38 Résultat : *Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices inversibles de largeur identiques, puis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ est une matrice inversible et on trouve*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Pour calculer l'inverse d'un produit des matrices on peut multiplier les inverses des matrices individuelles, mais dans l'ordre inverse.

Démonstration : Utiliser la définition de matrice inverse. Les calculations ci–dessous vérifie le résultat.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbb{I}_n \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbb{I}_n \\
(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbb{I}_n \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbb{I}_n
\end{aligned}$$

$\square$

3–39 Résultat : *Pour une matrice $\mathbf{A}$ carrée et inversible on touve*

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

Démonstration : Avec la définition de matrice inverse on arrive à

$$\mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}\right)^T = \mathbb{I}_N^T = \mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{A}^T = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbb{I}_N^T = \mathbb{I}_n$$

□

3–40 Résultat : *(règles de calcul)*
Pour des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *on trouve les règles de calcul suivantes:*

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{A}+\mathbf{B} & = & \mathbf{B}+\mathbf{A} & \textit{commutativité de l'addition} \\
\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) & = & (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} & \textit{assoziativité de l'addition} \\
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) & = & (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} & \textit{assoziativité de la multiplication} \\
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) & = & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} & \textit{loi de distributivité} \\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} & = & \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1} & \\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T & = & \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T & \\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T & = & \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T & \\
\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} & = & \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T &
\end{array}$$

Les règles ci–dessus sont correct, sous condition que les opérations sont bien définit.

3–41 Exemple : Le système des equations linéaires

$$\begin{array}{rrrl}
1\,x_1 & +3\,x_2 & +4\,x_3 = & 7 \\
2\,x_1 & +0\,x_2 & -1\,x_3 = & -1 \\
-2\,x_1 & +1\,x_2 & +2\,x_3 = & 2
\end{array}$$

peut être réécrit dans la forme

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{wobei} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Puis la solution est donnée par

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Une autre façon d'écrit ce système est par transposition.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

vut dire dans la forme

$$\vec{x}^T \cdot \mathbf{A}^T = \vec{b}^T$$

A partir de cette forme on arrive à la solution par une multiplication de la droite par la matrice $(\mathbf{A}^T)^{-1}$.

$$\vec{x}^T = \vec{b}^T \cdot (\mathbf{A}^T)^{-1} = \vec{b}^T \cdot (\mathbf{A}^{-1})^T = \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}\right)^T$$

♢

3–42 Exemple : À l'aide de *Octave* on obtiens la matrice inverse du problème ci–dessus par

Octave

```
A=[1 3 4; 2 0 -1; -2 1 2];
Ainv=inv(A)
x=Ainv*[7;-1;2]
-->
Ainv =
    0.33333  -0.66667  -1.00000
   -0.66667   3.33333   3.00000
    0.66667  -2.33333  -2.00000

x =
    1.0000
   -2.0000
    3.0000
```

Pour résoudre le système linéaire il est plus efficace de diviser par la matrice $\mathbf{A}$ de la gauche, sans calculer la matrice inverse.

Octave

```
x=A\[7;-1;2]
-->
x =
    1
   -2
    3
```

♢

3–43 Exemple : La calculatrice **HP-48** regarde tout vecteur comme vecteur de colonne, même si il est affiché comme vecteur de ligne. Mettre la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur $\vec{x}$ comme `[ 1 -2 3]` sur le stack et puis presser la touche de multiplication `*` pour arriver au résultat de la multiplication.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour insister à un vecteur de ligne il faut mettre `[[1 -2 3]]`.

Pour résoudre le système de l'exemple précédente mettre le vecteur $\vec{b}$ comme `[7 -1 2]` sur le stack, suivit par la matrice $\mathbf{A}$. Puis on peu utiliser la touche de division pour obtenir le vecteur de solution $\vec{x}$. Mettre la matrice $\mathbf{A}$ sur le stack et presser `1/x` pour calculer la matrice inverse. ♢

3–44 Définition : Pour une matrice carrée de largeur $n \times n$ la **trace** est donné comme somme des nombres dans la diagonale de la matrice, veut dire

$$\text{Spur } \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

En allemand on utilise le mot 'Spur'.

3–45 Exemple :

$$\text{Spur} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$$

♢

3.4 régression linéaire

Comme première application on va examine la **régression linéaire**.

3–46 Exemple : Une droite de la forme $y = a_0 + a_1\,x$ devrait passer par les trois points $(1,1)$, $(2,3)$ et $(4,0)$. On ne va pas obtenir une droite qui passe pare les trois points d'une façon exacte. Donc on calcule les trois distance verticales des points de la droite.

$$\begin{aligned}
r_1 &= a_0 + a_1\,x_1 - y1 = a_0 + a_1 \cdot 1 - 1 \\
r_2 &= a_0 + a_1\,x_2 - y2 = a_0 + a_1 \cdot 2 - 3 \\
r_3 &= a_0 + a_1\,x_3 - y3 = a_0 + a_1 \cdot 4 - 0
\end{aligned}$$

Puis on demande que la somme des carrées des trois distance soit minimale. Examiner

$$\begin{aligned}
F = r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 &= 3\,a_0^2 + a_1^2\,(1^2 + 2^2 + 4^2) + a_0\,a_1\,2\,(1+2+4) - \\
&\quad - a_0\,2\,(1+3+0) - a_1\,2\,(1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 0) + (1^2 + 3^2 + 0^2) \\
&= 3\,a_0^2 + 21\,a_1^2 + 14\,a_0\,a_1 - 8\,a_0 - 14\,a_1 + 10
\end{aligned}$$

Pour que cette déviation quadratique soit minimale[1] il faut que les dérivées par rapport à a_0 et a_1 soit zéro.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, F}{\partial a_0} &= 6\,a_0 + 14\,a_1 - 8 = 0 \\
\frac{\partial\, F}{\partial a_1} &= 14\,a_0 + 42\,a_1 - 14 = 0
\end{aligned}$$

Écrire cette système dans la forme

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 14 & 42 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

pour trouver la solution

$$a_0 = 2.5 \quad \text{et} \quad a_1 = -0.5$$

Puis on a trouver la droite $y = 2.5 - 0.5\,x$ qui passe le mieux possible par les trois points. $\diamondsuit$

La méthode de l'exemple précédente de dépends pas des valeurs numériques. À l'aide des matrice réécrire les calculations.

3–47 Exemple : Une droite de la forme $y = a_0 + a_1\,x$ devrait passer par quelques points (x_i, y_i). Chercer a_0 et a_1 tel que

$$y_i = a_0 + m_1\,x_i \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le n$$

À l'aide des matrices et vecteurs on écrit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}\,\vec{a}$$

[1] On parle aussi de la méthode des moindres carrés.

Pour $n > 2$ on ne peut pas satisfaire tous ces équations. Donc on demande, que la longueur du vecteur des résidu soit minimal.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \vec{y} - \mathbf{X}\,\vec{a}$$

Donc on examine l'expression

$$\begin{aligned} \|\vec{r}\|^2 &= \langle \vec{r}\,,\, \vec{r}\rangle = \vec{r}^T \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{y} - \mathbf{X}\,\vec{a})^T \cdot (\vec{y} - \mathbf{X}\,\vec{a}) \\ &= \vec{y}^T \cdot \vec{y} - (\mathbf{X}\,\vec{a})^T \cdot \vec{y} - \vec{y}^T \cdot (\mathbf{X}\,\vec{a}) + (\mathbf{X}\,\vec{a})^T \cdot (\mathbf{X}\,\vec{a}) \\ &= \|\vec{y}\|^2 - \vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \vec{y} - \vec{y}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} + \vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} \\ &= \|\vec{y}\|^2 - 2\,\vec{y}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} + \vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Pour que cette expression soit minimal, il faut que la dérivée par rapport aux composantes de $\vec{a}$ soit zéro. Examinons ces contributions l'une après l'autre.

$$\begin{aligned} \vec{y}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} &= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n y_i\ ,\ \sum_{i=1}^n y_i\, x_i \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= a_0\ \sum_{i=1}^n y_i + a_1 \sum_{i=1}^n y_i\, x_i \end{aligned}$$

Pour examiner $\vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a}$ écrire le produit des matrices

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_i & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On arrive à

$$\begin{aligned} \vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} &= (a_0\,,\, a_1) \cdot \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= (a_0\,,\, a_1) \cdot \begin{pmatrix} a_0\, n + a_1\ \sum_{i=1}^n x_i \\ a_0\ \sum_{i=1}^n x_i + a_1\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \\ &= a_0^2\, n + 2\, a_0\, a_1\ \sum_{i=1}^n x_i + a_1^2\ \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

Examinons les dérivées par rapport à a_0 et a_1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\|\vec r\|^2}{\partial a_0} &= -2\sum_{i=1}^n y_i + 2\,a_0\,n + 2\,a_1\sum_{i=1}^n x_i \\
\frac{\partial\,\|\vec r\|^2}{\partial a_1} &= -2\sum_{i=1}^n y_i x_i + 2\,a_0\sum_{i=1}^n x_i + 2\,a_1\sum_{i=1}^n x_i
\end{aligned}$$

Mettre ces deux expression à zéro rend un systèmes des équations linéaires pour les inconnues a_0 et a_1.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{pmatrix}$$

À l'aide de la matrice $\mathbf{X}$ réécrire ce system dans la forme

$$(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}) \cdot \vec a = \mathbf{X}^T \cdot \vec y$$

Pour des points (x_i, y_i) connus on peut résoudre ce système. ♢

La situation ci–dessus est rencontré assez fréquemment et donc on a introduit les notations

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i \quad , \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad , \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i \quad , \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i\,y_i$$

et le système est réécrit dans la forme

$$\begin{bmatrix} n & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{pmatrix}$$

À l'aide du Problème 3–11 on trouve une formule pour la solution.

$$\boxed{\begin{aligned}
\Delta &= n \cdot S_{xx} - S_x^2 \\
a_0 &= \tfrac{1}{\Delta}\,(S_{xx}S_y - S_x S_{xy}) \\
a_1 &= \tfrac{1}{\Delta}\,(n \cdot S_{xy} - S_x S_y)
\end{aligned}}$$

Ces formules sont façile à programmées et donc on peut déterminer la droite de régression pour des points donnés.

Dans l'exemple 3–46 on a

$$\vec y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

et donc

$$\mathbf{X}^T \cdot \vec y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$$

Le système à résoudre est donné par

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On retrouve les calculation de l'exemple 3–46.

La méthode de régression linéaire n'est pas limité à des droites de régression. L'exemple précédente est q'un cas spécial de la situation suivant:

3–48 Résultat : *(régression linéaire)*
Pour une matrice $\mathbf{X}$ *de largeur* $n \times m$ *et un vecteur* $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *chercher un vecteur* $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ *tel que la longueur du vecteur redidu* $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ *soit minimal. Utiliser*

$$\vec{r} = \boldsymbol{X} \cdot \vec{a} - \vec{y}$$

Trouver la solution $\vec{a} \in \mathbb{R}$ *comme solution du système de* m *équations linéaires*

$$(\boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{X}) \cdot \vec{a} = \boldsymbol{X}^T \cdot \vec{y}$$

Avec ce résultat on peut trouver la parabole qui passe le mieux possible par des points donnés.

3–49 Exemple : Une parabole $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ doit passer par les quatre points $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$ et $(4,5)$. Donc on demande que la somme des carrés des quatre distances verticale soit minimal.

$$r_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \quad \text{pour} \quad i = 1,2,3,4$$

Avec la notation des matrices on demande que la longeur du vecteur $\vec{r}$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

soit minimale. Donc on trouve la situation du résultat précédente et on tombe sur un système de trois équations pour trois inconnues.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solution est donnée par

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc la parabole optimale est

$$y(x) = 2.5 + 0.6\,x + 0\,x^2$$

C'est par hasard q'on tombe effectivement sur une droite. A cause de la symétrie des poits donnés on sait que la parabole doit passée par le point $(2.5\,,\,4.0)$.

En *Octave* utiliser la commande `LinearRegression()`[2].

Octave

```
x=[1;2;3;4];
F=[ones(size(x)),x,x.^2]
p=LinearRegression(F,y)
-->
p =
   2.5000e+00
   6.0000e-01
  -2.2204e-16
```

Trouver une vérification visule en Figure3.5, généré par le code ci–dessous.

Octave

```
yFit=F*p;
plot(x,y,'*',x,yFit)
axis([0 5 2 6])
```

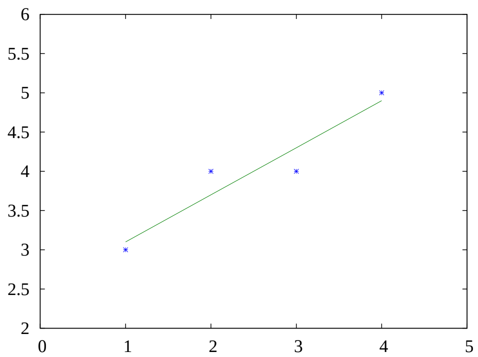


Figure 3.5: une parabole de regression

◇

3.5 optique géométrique

En optique géométrique, on peut utiliser les vecteurs

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{distance de l'axe optique} \\ \text{angle par rapport à l'axe optique} \end{pmatrix}$$

[2]À trouver sur la page web de l'auteur de ces notes.

Tous les rayon de lumière vont de gauche a droite. On ne regarde que les ray proche à l'axe et avec des angles petites. Comme exemples, examinons les éléments optiques suivants.

1. Un chemin libre de longueur s.
2. une lentille convexe avec longueur focale f. Pour une lentille concave choisir la longueur focale f négative.
3. Un solide sphérique de rayon R. Choisir R positif si la surface se boucle contre la direction du trait, R est négatif si la surface se boucle dans la direction du rayon incident.
4. Un plan orthogonal à l'axe optique avec des indices de réfractions différentes.

- Le premier exemple est la situation d'un chemin libre en Figure 3.6. À l'aide de trigonimetrie on arrive à

  $$y_2 = y_1 + s\,\sin\alpha \approx y_1 + s\,\alpha$$

  L'angle ne change pas et on obtien

  $$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + s\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{T}(s) \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

  On obtien une des matrices en Table 3.1.

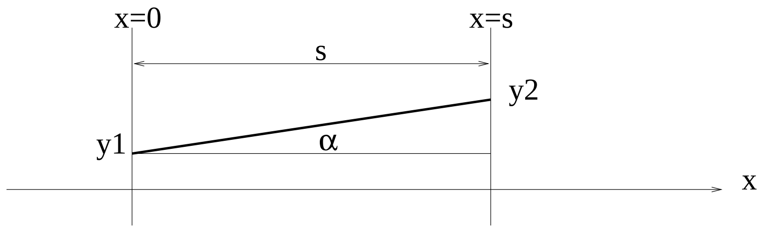


Figure 3.6: rayon dans un cemin libre

- L'élément l'entille sera examiner en exemple 3–50.
- ã un plan avec des indices de réfractions différentes (voire 3.7) on utilise le loi de réfraction

  $$n_1\,\sin\alpha_1 = n_2\,\sin\alpha_2$$

  A cause des petites angles on obtient

  $$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\,\alpha_1$$

  La position verticale du ray ne change pas et donc

  $$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{n_1}{n_2}\,\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

On arrive alors aux matrices de transfert du Tableau 3.1. Les sections 4 et 5 en [StanMeieFalc96] expliquent comment multiplier les matrices des éléments de bas pour traiter des système optiques plus compliqués et comment tirer de l'information deséeléments de cette matrice du système.

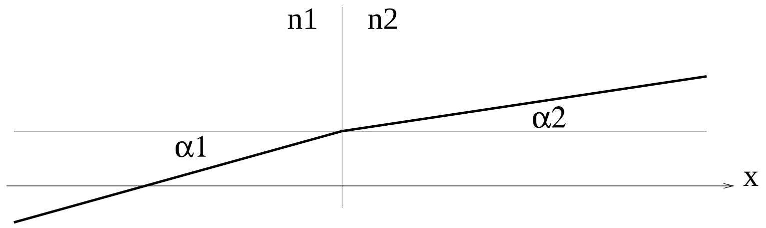


Figure 3.7: rayon par un plan de refraction

description	matrice
distance parcourir s	$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
lentille convexe, longueur focale f	$L(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
solide sphérique, rayon R indices de réfraction: à gauche n_1, à droite n_2	$S(R, n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2\, R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
plan, indices: à gauche n_1, à droite n_2	$S_\infty(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Tableau 3.1: Quelques matrices de transfert de l'optique géométrique

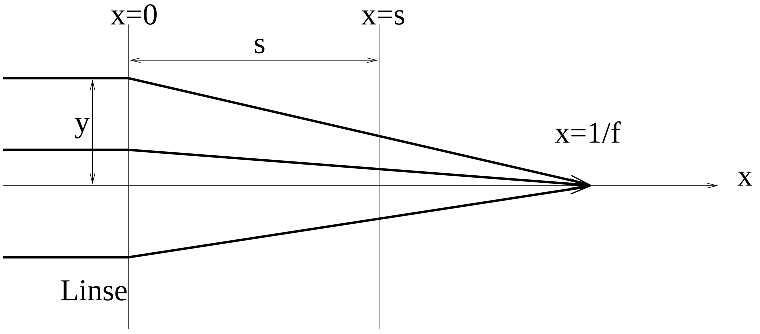


Figure 3.8: rayon par une lentille

3–50 Exemple : Des rayon proche à l'axe optique tombe sure ne lentille avec longueur focale f. Après la lentille le rayon va parcourir une distance libre de longueur s. La situation est esquissée en Figure 3.8.

Parce-que les rayon proche à l'axe sont parallèles à l'axe on utilise $\alpha = 0$ et arrive à une distance y_n et un angle α_n, donné par

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_n \\ \alpha_n \end{pmatrix} &= \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{L}(f) \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -y/f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y - s\,y/f \\ -y/f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc on arrive à une nouvelle distance $y - s\,y/f$ et l'angle est maintenant $-y/f$. En mettant $s = f$ on arrive à la distance $y - f\,y/f = 0$ et donc les rayon sont focalisé à une distance horizontale f de la lentille. Figure 3.8 confirme le résultat. ♢

3–51 Exemple : Dans une situation simple on a un objet de largeur 2 cm et un écran à une distance de 50 cm . Une lentille de longueur focale f se trouve à une distance de x cm de l'objet. Des rayons de lumière passent de l'objet à l'écran par la lentille. L'image de l'objet est inversée et a une largeur de 40 cm .

(a) Trouver la matrice de transfert $\mathbf{M}(x, f)$ de ce système optique.

(b) expliquer pourquoi la matrice $\mathbf{M}(x, f)$ doit être de la forme donnée ci–dessous, c'est–à–dire $A = -20$ et $B = 0$.

$$\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(c) Utiliser le théorème des multiplication des déterminant et $B = 0$ pour montrer que $D = 1/A$.

(d) Trouver $\frac{x}{f}$ à l'aide de $D = -1/20$. Puis trouver x à l'aide de $B = 0$

Solution:

(a) Die Matrix wird konstruiert durch

$$\begin{aligned}
\text{Gesamt} &= \text{Linse zu Schirm} \cdot \quad \text{Linse} \quad \cdot \text{Objekt zu Linse} \\
\mathbf{M}(x, f) &= \quad \mathbf{T}(50 - x) \quad \cdot \quad \mathbf{L}(f) \quad \cdot \quad \mathbf{T}(x) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 50 - x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 50 - x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \frac{50-x}{f} & x + (50 - x)\,(1 - \frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Somit ist die folgende Matrix zu untersuchen

$$\mathbf{M}(x,f) = \begin{bmatrix} 1-\frac{50-x}{f} & x+(50-x)\,(1-\frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1-\frac{x}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(b) Damit das Bild fokussiert ist muss $B = 0$ sein. Für $B \neq 0$ werden Strahlen, die vom selben Punkt ausgehen, aber nicht mit dem selben α, nicht am selben Ort auf den Schirm auftreffen. Das Bild wird gespiegelt und um den Faktor 20 vergrössert, deshalb $A = -20$.

In Formeln geschrieben

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ \alpha' \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile dieses Systems lautet

$$A\,2 + B\,\alpha = -40$$

Damit dies für beliebige α richtig ist muss $A = -20$ und $B = 0$ sein.

(c) $\det \mathbf{T}(s) = 1$ und $\det \mathbf{L}(f) = 1$ implizieren

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M}(x,f) &= \det(\mathbf{T}(50-x))\ \det(\mathbf{L}(f))\ \det(\mathbf{T}(x)) = 1 \\ \det\ \mathbf{M}(x,f) &= A\,D - B\,C = A\,D = 1 \\ D &= \frac{1}{A} \end{aligned}$$

(d)
- Wegen $D = 1/A = -1/20$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{-1}{20} &= 1-\frac{x}{f} \\ \frac{x}{f} &= \frac{21}{20} \end{aligned}$$

- Wegen $B = 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= x+(50-x)\,(1-\frac{x}{f}) \\ 0 &= x-(50-x)\,\frac{1}{20} \\ 20\,x &= 50-x \\ x &= \frac{50}{21} \end{aligned}$$

♢

3–52 Exemple : This example is taken from [GerrBurc75, p 43].
The left end of a long plastic rod of refraction index 1.56 is ground and polished to a convex (outward) spherical surface of radius 2.8 cm . An object 2 cm tall is located in the air and on the axis at a distance of of 15 cm from the vertex. Find position x and size of the image inside the rod. The situation is shown in figure 3.9

Solution: As the ray of light travels from left to right is passes three different elements:

1. a distance of 15 cm
2. the curved surface, determined by the rod

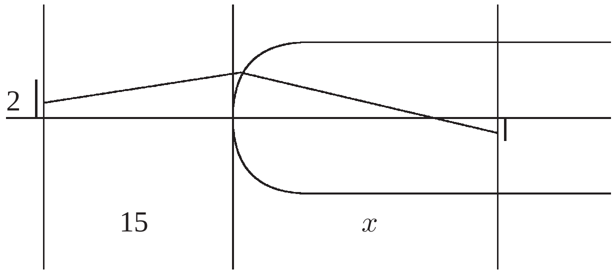


Figure 3.9: spherical rod, used as a lense

3. a distance of x cm

Thus the first matrix to be multiplied is the transfer by the distance 15 cm. This leads to the following calculations. It might help to read the operations from right to left since the vector is multiplied by the matrices in that order. This is also the order in which the ray passes the optic elements.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{image} & & \text{distance } x & & \text{spherical surface} & & \text{distance 15} & & \text{original} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \mathbf{T}(x) & \cdot & \mathbf{S}(R, n_i, n_a) & \cdot & \mathbf{T}(15) & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_a - n_i}{n_i\,R} & \frac{n_a}{n_i} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-1.56}{1.56 \cdot 2.8} & \frac{1}{1.56} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{array}$$

By multiplying the matrices we obtain

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - 0.128\,x & 15 - 1.282\,x \\ -0.128 & -1.128 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 - 0.128\,x)\,y_{init} + (15 - 1.282\,x)\,\alpha_{init} \\ -0.128\,y_{init} - 1.128\,\alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

If the image has to show at a distance x from the spherical surface, then all rays leaving at height y_{init} have to arrive at the same level y_{end}, independent on the initial angle α_{init}. This leads to the condition, that the number in the top right corner of the matrix has to vanish, i.e.

$$15 - 1.282\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 11.7$$

Thus the image will show at a distance of 11.7 cm. To find the size of the image we have to compute the result if we set $y_{init} = 2$, i.e.

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.128 & -1.282 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.256 - 1.282\,\alpha_{init} \end{pmatrix}$$

Thus the image has size 1 cm and is inverted.

$\diamondsuit$

3–53 Exemple : The above example may be solved with the help of *Octave*.

- First define the functions to compute the transfer matrices.
- Define a function $f(x)$ to compute the expression in the top right rorner of the matrix, as function of the distance x .
- Examine values for the distances x and generate a plot.

Octave
```
1; % assure script file

function res=T(s)
  res=[1,s;0,1];
endfunction

function res=L(f)
  res=[1,0;-1/f,1];
endfunction

function res=S(r,n1,n2)
  res=[1,0;(n1-n2)/(n2*r),n1/n2];
endfunction

function y=f(x)
  M=T(x)*S(2.8,1,1.56)*T(15);
  y=M(1,2);
endfunction

x= 5:1:20; y=x;

for k=1:length(x)
  y(k)=f(x(k));
endfor

plot(x,y)
grid on
```

Using the hint by the resulting graphic we conclude that $f(x)$ is an affine function and thus we can compute its zero easily. Using this zero x_0 we can then compute the size of the resulting image.

Octave
```
x0=-f(0)/(f(1)-f(0))
M=T(x0)*S(2.8,1,1.56)*T(15)
M*[2;0]
```

For other example we will not end u with an affine function and there will be no easy solution formula. In this case re may use the command `fsolve()` to determine solutions of nonlinear equations. Only one line of code will change.

Octave
```
x0=fsolve('f',10)
```

♢

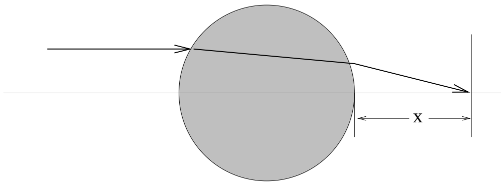


Figure 3.10: rayon par une boulle

3–54 Exemple : Des rayons lumineuse parallèles passent par une spère (rayon $r = 1$ cm) dont l'indic de réfraction est $n = 1.4$. Tous les rayons sont proche de l'axe de la spère. Trouver une esquisse en Figure 3.10.

(a) Trouver la matrice de transfert $\mathbf{M}(x)$ de ce système optique.

(b) A quelle distance x de la boule se trouve le foyer?

Solution: Der achsennahe Lichtstrahl durchläuft nacheinander

1. die erste Kugelfläche mit $n_1 = 1$, $n_2 = n = 1.4$, $R = 1$
2. eine freie Wegstrecke der Länge 2 cm.
3. die zweite Kugelfläche mit $n_1 = n = 1.4$, $n_2 = 1$, $R = -1$
4. eine freie Wegstrecke der Länge x cm.

Dies kann durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen kombiniert werden.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Gesamt} & & \text{Weg } x & & \text{zweite Fläche} & & \text{Kugel} & & \text{erste Fläche} \\
\mathbf{M}(x) & = & \mathbf{T}(x) & \cdot & \mathbf{S}(-1,1,n) & \cdot & \mathbf{T}(2) & \cdot & \mathbf{S}(1,n,1) \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{-1} & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-n & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n}-1 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 0.429 & 1.426 \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} & = & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 0.429 - 0.571\,x & 1.426 + 0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix}}
\end{array}$$

(a) Man erhält

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = \mathbf{M}(x) \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.429 - 0.571\,x & 1.426 + 0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}$$

(b) Damit der Strahl fokussiert muss der Eintrag oben links in der Matrix Null sein. Nur dann hängt der y–Wert des Bildstrahls nicht vom y–Wert des Eingangsstrahls ab. Da die Einganstrahlen parallel zur Achse sind ist $\alpha_{init} = 0$. Deshalb ist der Eintrag oben rechts in M irrelevant. Somit die folgende Beziehung gelten:

$$0.429 - 0.571\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.75 \text{ cm}$$

Diese Beispiel wurde [GerrBurc75] entnommen. ♢

3.6 problèmes

• **Problème 3–1:**
Apprendre a utiliser votre calculatrice pour des opérations avec des vecteurs et matrices.

3.6.1 vecteurs

• **Problème 3–2:**
Sont deux vecteurs donnés, $\vec{a} = (3, 1)$ et $\vec{b} = (2, -1)$. Calculer

(a) $\vec{a} + \vec{b}$.

(b) $\vec{a} - 3\,\vec{b}$.

(c) $1.5\,\vec{b} - \frac{1}{3}\,\vec{a}$.

(d) $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$.

(e) $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(f) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{a}$.

(g) $\vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{a})$.

(h) l'angle α entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

• **Problème 3–3:**
Touver la composante d'un vecteur dans la direction d'un autre vecteurs.

(a) Calculer la composante du vecteurs $\vec{a} = (1, 3)^T$ dans la direction du vecteur $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

(b) Calculer la composante du vecteurs $\vec{a} = (1, 3)^T$ dans la direction du vecteur $\vec{b} = (1, 2)^T$.

• **Problème 3–4:**
Trouver un vecteur de longueur 1, tel que il est perpendiculaire au vecteur $(2, 3)$.

• **Problème 3–5:**
Etant donné les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculer

(a) $\vec{a} + \vec{b}$ (b) $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ (c) $3\vec{a} + 4\vec{b}$ (d) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b}$
(e) $\vec{a} \times \vec{b}$ (f) $\vec{b} \times \vec{a}$ (g) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle$ (h) $\vec{a} \times \vec{a}$

• **Problème 3–6:**
Soit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les expressions suivantes, si c'est possible.

(a) $\vec{a} + 3\,\vec{b}$ (b) $3\,\vec{a} \cdot \vec{b}$ (c) $\vec{b} \times \vec{b}$ (d) $\vec{c} \times \vec{d}$
(e) $(\vec{c} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{e}$ (f) $\vec{c} \cdot (\vec{d} \cdot \vec{e})$ (g) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

• **Problème 3–7:**
Utiliser quelques exemples pour vérifier que le produit véctorielle n'est pas assoziativ.

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$$

• **Problème 3–8:**
Déterminer l'angle α entre les deux vecteurs suivants:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3.6.2 matrices

• **Problème 3–9:**

Für die beiden Matrizen

Pour les deux matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & -2 \\ y & -2 \end{bmatrix}$$

gilt

on sait que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Calculer $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

• **Problème 3–10:**
Untersuchen Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie (falls möglich)

(a) $\mathbf{D} + \mathbf{E}$

(b) $\mathbf{D} - \mathbf{E}$

(c) $5\,\mathbf{A}$

(d) $-7\,\mathbf{D}$

(e) $2\,\mathbf{B} - \mathbf{C}$

(f) $-3\,(\mathbf{D} + 2\,\mathbf{E})$

(g) $\mathbf{D}^T + \mathbf{D}$

(h) $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$

(i) trace $\mathbf{D}$

(j) $4\,\text{trace}\,(7\,\mathbf{B})$

(k) $2\,\mathbf{A}^T + \mathbf{C}$

(l) $(\mathbf{D} - \mathbf{E})^T$

(m) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$

(n) trace $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T)$

• **Problème 3–11:**
Verifizieren Sie, dass für eine 2×2–Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mit $a\,d - b\,c \neq 0$ die inverse Matrix gegeben ist durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

• **Problème 3–12:**
Zeigen Sie, dass für eine invertierbare Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

3.6.3 régression

• **Problème 3–13:**

Examiner les points (x_i, y_i) ci dessous et essayer de mettre une parabole par ces points le plus proche possible (régression linéaire).

Untersuchen Sie die untenstehenden Punkte (x_i, y_i) und versuchen Sie eine Parabel möglichst gut durch diese Punkte zu legen (lineare Regression).

$$(x_1, y_1) = (1, 1) \quad , \quad (x_2, y_2) = (3, 0) \quad , \quad (x_3, y_3) = (4, 2) \quad , \quad (x_4, y_4) = (5, 5)$$

(a) Trouver un système des équations linéaires pour les coefficients de la parabole.

(b) Trouver la parabole.

(a) Finden Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten der Parabel.

(b) Bestimmen Sie die Parabel.

• **Problème 3–14:**
Untersuchen Sie die vier Punkte $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ und $(4, 0)$.

(a) Finden Sie eine Gerade, die so gut wie möglich durch diese Punkte geht.

(b) Finden Sie eine Parabel, die so gut wie möglich durch diese Punkte geht.

• **Problème 3–15:**
Pour calibrer des nouveaux instruments il faut souvent mesurer une largeur physique avec deux instruments différents.

- une premier mesure avec l'instrument à calibré rends des valeurs y_i
- une deuxième mesure avec l'instrument de référence rends des valeurs x_i

A trouver la valeur optimale du facteur α tel que $y = \alpha\,x$, respectivement $y_i \approx \alpha\,x_i$. Utiliser une régression linéaire pour montrer que la valeur optimale est donnée par

$$\alpha = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

• Problème 3–16:

Une courbe de la forme ci–dessous doit passer par les points $P_i = (x_i, y_i)$ donnés le plus proche possible, veut dire

Eine Kurve von der unten gegebenen Form soll möglichst gut durch die gegebenen Punkte $P_i = (x_i, y_i)$ gehen, d.h.

$$\|\vec{r}\|^2 = \sum_{k=1}^{5} r_k^2 = \sum_{k=1}^{5} (f(x_k) - y_k)^2 \quad \text{minimal}$$

avec

wobei

$$f(x) = A\,\cos x + B\,\sin x + C$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.45 \end{pmatrix} \quad , \quad P_3 = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.4 \end{pmatrix} \quad , \quad P_5 = \begin{pmatrix} \pi \\ -3.4 \end{pmatrix}$$

Écrire le vecteur résiduel dans la forme

Schreiben Sie den Residualvektor als Ausdruck der Form

$$\vec{r} = \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - \vec{y}$$

(a) Trouver un système de trois équations linéaire pour les constantes A, B et C.

(b) Calculer A, B et C.

(a) Finden Sie ein System von drei linearen Gleichungen für die Konstanten A, B und C.

(b) Berechnen Sie A, B und C.

3.6.4 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 3–3 :

(a) Le vecteur $\vec{b}$ et normalisé.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

La composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{b}$ a donc la longueur $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

(b) Le vecteur $\vec{b}$ n'est pas normalisé. On trouve

$$\|\vec{b}\|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

Alors il faut diviser $\vec{b}$ par $\sqrt{5}$ pour obtenir une longueur de 1.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

La composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{b}$ a donc la longueur $\frac{7}{\sqrt{5}}$.

Solution pour problème 3–6 :

(a)

$$\vec{a} + 3\,\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$3\,\vec{a}\cdot\vec{b} = -3$$

(c)

$$\vec{b}\times\vec{b} = \vec{0}$$

(d)

$$\vec{c}\times\vec{d} = \quad \text{ne pas définit}$$

(e)

$$(\vec{c}\cdot\vec{d})\cdot\vec{e} = \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\vec{c}\cdot(\vec{d}\cdot\vec{e}) = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(g)

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \quad \text{ne pas définit}$$

Solution pour problème 3–8 : $\alpha = 112.6^\circ$.

Solution pour problème 3–9 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & -2 \\ y & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\,y + 2\,z & -3 - 2\,x \\ 4\,y & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} x\,y + 2\,z &= 1 \\ -3 - 2\,x &= -9 \\ 4\,y &= 4 \end{aligned}$$

Daraus kann man leicht ablesen, dass $y = 1$, $x = 3$ und $z = -1$. Nun führt eine einfache Matrizenmultiplikation zum Resultat

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -11 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Solution pour problème 3–11 : Nachrechnen, dass $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}_2$ und $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbb{I}_2$.

Solution pour problème 3–12 : Es gilt

$$\mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\right)^T = \mathbb{I}_n^T = \mathbb{I}_n$$

und

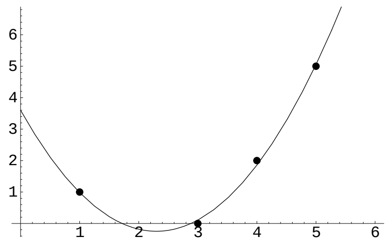
$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{A}^T = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbb{I}_n^T = \mathbb{I}_n$$

Somit ist die gewünschte Eigenschaft gezeigt.

Solution pour problème 3–13 : Dies ist ein mit linearer Regression zu lösendes Problem. Für die Parabel

$$y(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2$$

sind die Parameter c_i so zu bestimmen, dass die Abweichung der Parabel von den Punkten minimal wird. Dies ist durch die folgende Graphik illustriert. Die Matrix $\mathbf{X}$ muss für die Rechnung verwendet werden.



$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

(a) Das zu lösende Gleichungssytem ist

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 4 & 13 & 51 \\ 13 & 51 & 217 \\ 51 & 217 & 963 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 34 \\ 158 \end{pmatrix}$$

(b) Die Lösung ist somit

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.60000 \\ -3.34545 \\ 0.72727 \end{pmatrix}$$

und die gesuchte Parabel

$$y(x) = 3.60000 - 3.34545\,x + 0.72727\,x^2$$

Solution pour problème 3–14 :

(a)

$$y(x) = 5 - 0.9\,x$$

(b)

$$y(x) = -1.25 + 5.35\,x - 1.25\,x^2$$

Solution pour problème 3–15 : Zu minimieren ist der Betrag des Residualvektors $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{y} - \alpha\,\vec{x}$$

Somit wird aus der Matrix $\mathbf{X}$ in Resultat 3–48 ein Vektor $\vec{x}$ und zu lösen ist die Gleichung

$$\left(\vec{x}^T \cdot \vec{x}\right)\,\alpha = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$$

oder auch

$$S_{xx}\,\alpha = S_{xy}$$

Somit ist die Lösung

$$\alpha = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i\, y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Nun kann auch noch die Standardabweichung σ_α des optimalen Parameters geschätzt werden. Hierzu muss zuerst die Standardabweichung der y–Werte geschätzt werden durch

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha\, x_i)^2$$

Dann folgt mit Hilfe der Rechenregeln für Varianzen (Quadrate der Standardabweichungen)

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{S_{xx}^2}\sum_{i=1}^2 x_i^2\,\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 x_i^2}{S_{xx}^2}\,\sigma_y^2 = \frac{1}{S_{xx}}\,\sigma_y^2$$

Für den Spezialfall von konstanten Werten $x_i = x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1}{n\,x}\sum_{i=1}^n y_i \\
\sigma_\alpha &= \frac{1}{x\,\sqrt{n}}\,\sigma_y
\end{aligned}$$

Solution pour problème 3–16 : In den Spalten der Matrix $\mathbf{X}$ stehen die $\cos$- und $\sin$–Werte der x–Koordinaten, ergänzt durch eine Spalten von Einsen.

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ C\end{pmatrix} - \vec{y} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 1 \\ \cos 1 & \sin 1 & 1 \\ \cos\pi/2 & \sin\pi/2 & 1 \\ \cos 2 & \sin 2 & 1 \\ \cos\pi & \sin\pi & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ C\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.45 \\ -0.5 \\ -1.4 \\ -3.4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos 1 & \sin 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cos 2 & \sin 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ C\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.45 \\ -0.5 \\ -1.4 \\ -3.4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(a) Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ C\end{pmatrix} = \mathbf{X}^T\cdot\vec{y}$$

$$\begin{bmatrix} 2.4651 & 0.0762475 & 0.124155 \\ 0.0762475 & 2.53490 & 2.75077 \\ 0.124155 & 2.75077 & 5.0000 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.62574 \\ -1.39435 \\ -4.45 \end{pmatrix}$$

(b) Das führt auf die Lösung

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.92044 \\ 1.01667 \\ -1.49701 \end{pmatrix}$$

3.7 récapitulation

Après ce chapitre on doit

- savoir calculer avec des vecteur d'une façon fiable et rapide: addition, multiplication avec scalaire, produit scalaire et produit vectorielle.
- savoir calculer avec des matrices d'une façon fiable et rapide: addition et multiplication.
- maîtriser les règles de calcul pour vecteurs et matrices.
- savoir utiliser une matrice inverse.
- savoir résoudre de problème de régression linéaire simple.
- savoir utiliser des matrices pour des problèmes simple de l'optique géométrique.

Kapitel 4

Systeme von linearen Gleichungen

Als Arbeitsgrundlage für dieses Kapitel erhalten Sie eine Kopie des ersten Kapitels aus dem englischen Buch *Elementary Linear Algebra, Application Version* von Howard Anton und Chris Rorres ([AntoRorr91]). Diese Notizen sind zum grossen Teil diesem Buch entnommen.

4.1 Einführung zu Systemen von linearen Gleichungen

Die Gleichung einer Geraden in der xy–Ebene kann gegeben werden durch eine Gleichung

$$a_1\,x + a_2\,y = b$$

wobei die Werte von a_1, a_2 und b die gerade bestimmen. Eine solche Gleichung heisst **lineare Gleichung** für die Variablen x und y. Analog ist eine **lineare Gleichung** für n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben durch

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + \ldots + a_n\,x_n = b$$

So kann eine Ebene im Raum beschrieben werden als lineare Gleichung für die Variablen x, y und z.

4–1 Beispiel : Das folgende sind lineare Gleichungen.

$$\begin{aligned} x + 3\,y &= 7 \\ y &= \frac{1}{3}\,x + 3\,z + 7 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 - 4\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

♢

Zu beachten ist, dass in linearen Gleichungen keine Produkte, Brüche oder Potenzen (bezüglich der Variablen) vorkommen dürfen.

4–2 Beispiel : Das folgende sind **keine** linearen Gleichungen.

$$\begin{aligned} x^2 + 3\,y &= 7 \\ y &= \frac{1}{3\,x} + 3\,\sqrt{z} + 7 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 - 4\,x_1\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

♢

4–3 Beispiel : Um alle Lösungen der linearen Gleichung

$$2\,x - 4\,y = \pi$$

für die Variablen x und y zu finden, kann man den Wert von x beliebig wählen. Wir setzen hier $x = t$. Dann kann der Wert von y aus der Gleichung bestimmt werden durch

$$y = \frac{1}{4}\;(2\,x - \pi) = \frac{1}{4}\;(2\,t - \pi)$$

Wir erhalten somit die **parametrisierten Lösungen** mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & \frac{2\,t-\pi}{4} \end{array} \qquad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\diamondsuit$

Sind mehrere lineare Gleichungen miteinander zu untersuchen, so spricht man von einem **System von linearen Gleichungen**.

4–4 Beispiel : Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 4\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 & = & -1 \\ 3\,x_1 + x_2 + 9\,x_3 & = & -4 \end{array}$$

wird gelöst durch $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, da für diese Werte beide Gleichungen erfüllt sind.

Jedoch ist $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$ ist keine Lösung, da nur die erste der beiden verlangten Gleichungen gelöst ist. $\diamondsuit$

4–5 Beispiel : Das System

$$\begin{array}{rcl} 2\,x - 3\,y & = & 1 \\ 3\,x + 2\,y & = & 8 \end{array}$$

von linearen Gleichungen wird gelöst durch $x = 2$ und $y = 1$. Die beiden Gleichungen entsprechen je einer Geraden in der Ebene. Der Punkt $(x, y) = (2, 1)$ entspricht somit dem Schnittpunkt der beiden Gleichungen. Dieser Ansatz erlaubt es zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten auch mittels eines graphischen Verfahrens zu lösen, indem zwei Geraden geschnitten werden. $\diamondsuit$

4–6 Beispiel : Das System

$$\begin{array}{rcl} 2\,x - 3\,y & = & 1 \\ 4\,x - 6\,y & = & 8 \end{array}$$

von linearen Gleichungen hat keine Lösung. Dies kann leicht eingesehen werden, falls man die erste Gleichung mit 2 multipliziert. Das führt auf das äquivalente System

$$\begin{array}{rcl} 4\,x - 6\,y & = & 2 \\ 4\,x - 6\,y & = & 8 \end{array}$$

Diese beiden Gleichung können nicht zusammen gelöst werden, das sonst $2 = 8$ sein müsste. Die den Gleichungen entsprechenden Geraden sind parallel und haben keinen Schnittpunkt. $\diamondsuit$

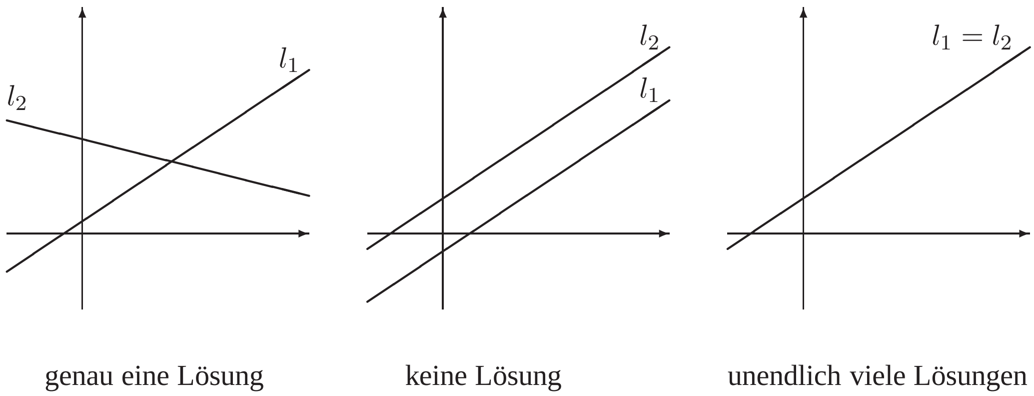


Abbildung 4.1: Lösungsverhalten von Systemen von Gleichungen

4–7 Definition : Ein System von linearen Gleichungen heisst **inkonsistent**, falls es keine Lösungen hat. Ein System von linearen Gleichungen, dass mindestens eine Lösung hat heisst **konsistent**.

Sucht man den Schnittpunkt zweier Geraden in der Ebene, so sind drei verschiedene Verhalten möglich. Dies ist in Abbildung 4.1 illustriert.

1. Die Geraden sind nicht parallel und haben somit genau einen Schnittpunkt. Das entsprechende System von linearen Gleichungen hat **genau eine** Lösung. Das System ist konsistent.
2. Die Geraden sind parallel, liegen aber nicht aufeinender. Es gibt keinen Schnittpunkt. Das entsprechende System von linearen Gleichungen hat **keine** Lösung. Das System ist inkonsistent.
3. Die Geraden sind parallel und sie liegen aufeinender. Es gibt unendlich viele Schnittpunkte. Das entsprechende System von linearen Gleichungen hat **unendlich viele** Lösungen. Das System ist konsistent.

Man wird nie ein System von linearen Gleichungen finden mit genau zwei Lösungen. Wir haben hier nur zwei Gleichungen für zwei Unbekannte untersucht, werden aber später sehen, dass dieses Resultat für beliebige Systeme von linearen Gleichungen richtig ist.

> Ein System von linearen Gleichungen hat entweder genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

4–8 Beispiel : Ebenen im Raum
Jede der drei Gleichungen des System

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

kann aufgefasst werden als eine Ebenengleichung im Raum $\mathbb{R}^3$. Ohne zu rechnen ist klar, dass folgenden Situationen auftreten können:

1. Die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt. Es gibt genau eine Lösung. Das System ist konsistent.

2. Zwei der drei Ebenen sind parallel, aber sie sind nicht identisch. Es gibt somit keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Es gibt keine Lösung. Das System ist inkonsistent.

3. Die Ebenen sind nicht parallel, aber je zwei dieser Ebenen bilden eine Schnittgeraden und diese sind parallel (Toblerone). Es gibt keine Lösung. Das System ist inkonsistent.

4. Zwei der Ebenen sind identisch, die dritte ist nicht parallel zu den ersten beiden. Es ergibt sich eine Schnittgerade, d.h. unendlich viele Schnittpunkte. Das System ist konsistent.

5. Die drei Ebenen sind identisch und die Lösungsmenge ist diese Schnittebene. Es gibt unendlich viele Schnittpunkte. Das System ist konsistent.

$\diamondsuit$

4.2 Matrix–Darstellung und der Algorithmus von Gauss

4.2.1 Matrix–Darstellung eines linearen Gleichungssystems

Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

sind eigentlich nur die Zahlen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

relevant. Man spricht von der **Darstellung des Gleichungssystems durch eine erweiterte Matrix**. Die erste Spalte der Matrix enthält die Koeffizienten der ersten Variablen (hier x genannt). Die zweite Spalte der Matrix enthält die Koeffizienten der zweiten Variablen (hier y genannt). Einzig die letzte Spalte spielt eine besondere Rolle: sie enthält die Konstanten der Gleichungen. Die erste Zeile der Matrix enthält die Koeffizienten der ersten Gleichung, die zweite Zeile der Matrix enthält die Koeffizienten der zweiten Gleichung, u.s.w.

Nun werden wir solche Systeme von Gleichungen systematisch lösen. Dazu werden wir diese Systeme in äquivalente Systeme umformen. Dabei ist das Ziel eine elementar lösbares Gleichungssystem zu erhalten. Wir verwenden die folgenden Grundoperationen:

- Eine Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl multiplizieren oder dividieren.
- Ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren.
- Zwei Gleichungen austauschen.

Diese drei Grundoperationen verändern die Lösungsmenge des Systems nicht, sind also **Äquivalenztransformationen**. Um Schreibarbeit zu sparen werden wir die Operationen meist mit Hilfe der Matrix–Notation ausführen. Es ergeben sich die folgenden Zeilenoperationen:

- Eine Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl multiplizieren oder dividieren.
- Ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren.
- Zwei Zeilen austauschen.

Nun wollen wir das Verfahren an einem Beispiel sorgfältig demonstrieren.

4–9 Beispiel : Als einführendes, typisches Beispiel untersuchen wir ein lineares System von 3 Gleichungen für drei Unbekannte (x, y und z). Statt planlos zu rechnen erstellen wir zuerst einen Plan:

1. Mit Hilfe der ersten Gleichung x aus der zweiten und dritten Gleichung eliminieren.
2. Mit Hilfe der (neuen) zweiten Gleichung y aus der dritten Gleichung eliminieren.
3. Die (neue) dritte Gleichung kann nun leicht nach z aufgelöst werden.
4. Der nun bekannte Wert von z und die zweite Gleichung ergeben y.
5. Die nun bekannten Werte von z und y und die erste Gleichung ergeben schliesslich den Wert von x.

Die obigen Rechnungen sind mit Hilfe von Äquivalenztransformationen auszuführen, da die Lösungsmenge nicht ändern darf. Nun untersuchen wir auch noch den Effekt dieser Operationen auf die entsprechende Darstellung des Systems durch eine erweiterte Matrix.

In der linken Spalte finden Sie Gleichungssysteme und die Beschreibung der Operationen. In der rechten Spalte werden die selben Operationen mit Hilfe der erweiterten Matrix ausgeführt.

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Das 2-fache der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung subtrahieren — Das 2-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & 2\,y & -7\,z & = & -17 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Das 3-fache der ersten Gleichung von der dritten Gleichung subtrahieren — Das 3-fache der ersten Zeile von der dritten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & 2\,y & -7\,z & = & -17 \\ & 3\,y & -11\,z & = & -27 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Die zweite Gleichung mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren, dann dann das 3-fache der zweiten Gleichung von der dritten Gleichung subtrahieren — Die zweite Zeile mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren dann das 3-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & y & -\frac{7}{2}\,z & = & \frac{-17}{2} \\ & & \frac{-1}{2}\,z & = & \frac{-3}{2} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array}\right]$$

Die dritte Gleichung mit -2 multiplizieren — Die dritte Zeile mit -2 multiplizieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & y & -\frac{7}{2}\,z & = & \frac{-17}{2} \\ & & z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Das $\frac{7}{2}$-fache der dritten Gleichung zur zweiten Gleichung addieren — Das $\frac{7}{2}$-fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile addieren

Das 2-fache der dritten Gleichung von der ersten Gleichung subtrahieren — Das 2-fache der dritten Zeile von der ersten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & & = & 3 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Die zweite Gleichung von der ersten Gleichung subtrahieren — Die zweite Zeile von der ersten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Die einzige Lösung

$$x = 1 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad z = 3$$

ist nun leicht ablesbar. $\diamondsuit$

4.2.2 Treppengestalt, Verfahren von Gauss

Die Rechenschritte im vorangehenden Beispiel wurden natürlich nicht zufällig gewählt. Der bekannte Algorithmus von **Gauss–Jordan** wurde ausgeführt. Damit können die Lösungen von beliebigen linearen Gleichungssystemen untersucht werden. Wir werden nun dieses Verfahren etwas genauer unter die Lupe nehmen.

4–10 Definition : Eine Matrix ist in **Treppenform** falls:

- die erste von Null verschiedenen Zahl in jeder Zeile ist eine 1.
- Zeilen die ausschliesslich die Zahl 0 enthalten sind unten zu finden.
- je weiter unten die Zeile, desto weiter rechts die führende 1.
- unter einer „führenden 1“ stehen nur Zahlen 0 .

Eine Matrix ist in **reduzierter Treppenform** falls:

- die Matrix in Treppenform ist
- in jeder Spalte mit einer führenden 1 sind alle anderen Zahlen 0.

Ist die Matrix in reduzierter Treppenform, so stehen unter und über führenden Zahlen 1 nur Nullen.

4–11 Beispiel : Die folgenden Matrizen sind in Treppenform, aber nicht in reduzierter Treppenform.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Um diese Matrizen in reduzierte Treppenform zu bringen, müssen sie noch leicht modifiziert werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

♢

4–12 Bemerkung : Nun kann man in den Rechnungen in Beispiel 4–9 erkennen, dass die Matrix zuerst in Treppenform und anschliessend in reduzierte Treppenform transformiert wird. Bei all diesen Transformationen wird die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändert (Äquivalenztransformationen).

Die folgenden Punkte in Beispiel 4–9 sind zu beachten:

1. Ist die Matrix in Treppenform, so kann das zugehörige System von Gleichungen „von unten nach oben“ aufgelöst werden.
2. Die vollständig reduzierte Matrix enthält nur die Zahlen 0, ausser in der Diagonalen, dort findet man die Zahlen 1 . Es ist die **Einheitsmatrix**.
3. Ist die Matrix vollständig reduziert, so ist das zugehörige System von Gleichungen bereits aufgelöst.

♢

Nun wollen wir einige Beispiel von Gleichungssystemen untersuchen.

4–13 Beispiel : Das folgende Gleichungssystem führt zu einer Matrix in Treppengestalt.

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2\,y & +3\,z & = & 9 \\ & y & +9\,z & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Aus der letzten Zeile liest man ab, dass $z = 0$. Dann folgt aus der zweiten Gleichung sofort $y = 1$. Die erste Zeile ergibt anschliessend $x = 9 - 2\,y - 3\,z = 7$. Somit ist das System gelöst. Transformiert man das ursprüngliche System auf eine Matrix in reduzierter Treppenform, so ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\begin{array}{rrrcl} x & & & = & 7 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist elementar ablesbar. ♢

4–14 Beispiel : Das folgende Gleichungssystem führt zu einer Matrix in Treppengestalt.

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2\,y & +3\,z & +4\,u & = & 10 \\ & & z & +\pi\,u & = & 0 \\ & & & u & = & -3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Aufgrund der letzten Zeile gilt $u = -3$ und die zweite Gleichung ergibt $z = 0 - \pi\,u = 3\,\pi$. Die erste Gleichung kann nach x aufgelöst werden mit dem Resultat

$$x = 10 - 2\,y - 3\,z - 4\,u = 10 - 2\,y - 9\,\pi + 12$$

Er darf nicht erstaunen, dass drei Gleichungen für vier Unbekannt nicht eindeutig gelöst werden können. Wählt man $y = t$ als Parameter, so können alle Lösungen geschrieben werden in der Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 - 9\,\pi \\ 0 \\ 3\,\pi \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein identisches Lösungsverhalten kann auch bei vier Gleichungen für vier Unbekannte entstehen. Falls Sie nach der Reduktion auf Treppenform die Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2\,y & +3\,z & +4\,u & = & 10 \\ 0\,x & +0\,y & +z & +\pi\,u & = & 0 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +u & = & -3 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +0\,u & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

vorfinden, so erhalten sie dieselben Lösungen. ♢

4–15 Beispiel : Das folgende Gleichungssystem führt zu einer Matrix in Treppengestalt.

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2\,y & +3\,z & +4\,u & = & 10 \\ 0\,x & +0\,y & +z & +\pi\,u & = & 0 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +u & = & -3 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +0\,u & = & 13 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right]$$

Die vierte Gleichung ist nicht lösbar. Das System von vier Gleichungen für vier Unbekannte hat somit keine Lösungen. ♢

4.3 Lösen von linearen Gleichungssystemen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Form der Lösungen eines linearen Gleichungssystems leicht aus der auf Treppengestalt reduzierten erweiterten Matrix abgelesen werden können. Es geht nicht darum viele, grosse Systeme mühsam von Hand aufzulösen. Später werden Sie Computer und Taschenrechner einsetzen, um solche Systeme effizient zu lösen. Sie sollten Sie auf die Struktur der zu verwendenden Algorithmen und die Interpretation der Resultate konzentrieren.

4.3.1 Gauss'sche Elimination

Die vorangehenden Beispiele zeigen, dass für eine Matrix in Treppengestalt die Lösungen des zugehörigen linearen Gleichungssystems leicht beschrieben werden können. Deshalb versuchen wir nun jede Matrix in Treppengestalt zu bringen, mit Hilfe von Äquivalenztransformationen. Dies wollen wir systematisch ausführen.

4–16 Beispiel : Als Beispiel untersuchen wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} & -2\,y & +7\,z & = & 12 \\ 2\,x & -10\,y & +12\,z & = & 28 \\ 2\,x & -5\,y & -5\,z & = & -1 \end{array}$$

Das führt auf eine erweiterte Matrixdarstellung.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -10 & 12 & 28 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Finde die am weitesten links liegende Spalte, die nicht ausschliesslich die Zahl 0 enthält.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -10 & 12 & 28 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Die erste Zeile ist eventuell mit einer anderen Zeile zu vertauschen, damit die erste Zahl nicht 0 ist.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -10 & 12 & 28 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Multipliziere die erste Zeile mit einer geeigneten Zahl ($\frac{1}{2}$), damit die erste Zahl 1 wird.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Geeignete Vielfache der ersten Zeile sind von den anderen zu subtrahieren, damit alle Zahlen unterhalb der 1 zu 0 werden.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 0 & +5 & -17 & -29 \end{array}\right]$$

Nun kann die erste Zeile abgedeckt werden und das Verfahren neu gestartet werden mit der kleineren Matrix.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & +5 & -17 & -29 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & +5 & -17 & -29 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Die letzte Matrix entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x & -5\,y & +6\,z & = & 14 \\ & y & -\frac{7}{2}\,z & = & -6 \\ & & z & = & 2 \end{array}$$

Diese System kann nun leicht von unten nach oben aufgelöst werden

$$\begin{array}{rcrrrcr} z & = & 2 & & & = & 2 \\ y & = & -6 & +\frac{7}{2}\,z & & = & 1 \\ x & = & 14 & -6\,z & +5\,y & = & 7 \end{array}$$

♢

4–17 Beispiel : Die Zeilenoperationen des oben ausgeführten Algorithmus von Gauss können auch in *Octave* oder *Matlab* implementiert werden. Dazu sind zwei Befehle zu definieren:

- `SwapRows` um zwei Zeilen zu vertauschen.

SwapRows.m

```
function An=SwapRows(A,i,j)
  An=A;
  An(i,:)=A(j,:);
  An(j,:)=A(i,:);
endfunction
```

- `Pivot` um eine Zahl zu 1 zu machen und die darunterstehenden Zahlen zu eliminieren.

Pivot.m

```
function An=Pivot(A,i,j)
  An=A;
  An(i,:) = An(i,:)/A(i,j);
  for k=i+1:size(A)(1)
      An(k,:) = An(k,:)-A(k,j)*An(i,:);
  endfor
endfunction
```

Der obenstehende Code ist nicht effizient implementiert und darf nur für Illustrationen und Verifikation von Aufgaben verwendet werden. Es gibt effiziente Implementierungen.

Nun kann das vorangehende Beispiel durchgerechnet werden.

Octave

```
### script file to test Gauss algorithm
A=[0 -2 7 12; 2 -10 12 28; 2 -5 -5 -1]
A=SwapRows(A,1,2)
A=Pivot(A,1,1)
A=Pivot(A,2,2)
A=Pivot(A,3,3)
```

♢

4–18 Theorem : *Gauss'sche Elimination*
Um die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems in Treppengestalt zu bringen kann systematisch vorgegangen werden.

1. *Finde die am weitesten links liegende Spalte, die nicht ausschliesslich die Zahl 0 enthält.*
2. *Die erste Zeile ist eventuell mit einer anderen Zeile zu vertauschen, damit die erste Zahl nicht 0 ist.*
3. *Multipliziere die erste Zeile mit einer geeigneten Zahl, damit die erste Zahl 1 wird.*
4. *Geeignete Vielfache der ersten Zeile sind von den anderen zu subtrahieren, damit alle Zahlen unterhalb der 1 zu 0 werden.*
5. *Nun kann die erste Zeile abgedeckt werden und das Verfahren neu (Schritt 2) gestartet werden mit der kleineren Matrix.*

Aufgabe 4–4 auf Seite 115 ist eine geeignete, einfache Übungsaufgabe.

4.3.2 Homogene Systeme

4–19 Definition : Sind die Zahlen $a_{i,j}$ für $1 \le i \le n$ und $1 \le j \le m$ gegeben, so heisst.

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & 0 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & 0 \\
a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + & \ldots & +a_{mn}\,x_n & = & 0
\end{array}$$

ein **homogenes System von linearen Gleichungen**. Es sind m Gleichungen für die n Unbekannten x_1, x_2, $\ldots$, x_n .

Die zu diesem System gehörende erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 \\
 & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & 0
\end{array}\right]$$

Da durch Zeilenoperationen die Null–Spalte rechts immer erhalten bleibt, ist es nicht unbedingt notwendig diese Spalte mitzuschreiben.

> Ein homogenes System von linearen Gleichungen kann immer gelöst werden, indem alle Variablen 0 gewählt werden.

Gleich viele Gleichungen und Unbekannte

Stimmen die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten überein ($n = m$), so wird die auf Treppengestalt gebrachte Matrix meistens die folgende Form haben:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{3n} & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{array}\right]$$

d.h.

- O unterhalb der Diagonalen
- 1 entlang der Diagonalen
- beliebige Zahlen oberhalb der Diagonalen. Diese Zahlen werden üblicherweise nicht mit den ursprünglich dort stehenden Zahlen übereinstimmen.

Das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & 0 \\ x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & 0 \\ x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & x_n & = & 0 \end{array}$$

ist leicht von unten nach oben lösbar. Die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ ist die einzige Lösung.

Es kann aber auch vorkommen, dass die letzte Zeile der erweitertem Matrix nur 0 enthält. Dann ist die letzte Variable frei wählbar, die anderen können daraus berechnet werden. Als Beispiel untersuchen wir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

In entsprechenden Gleichungssystem für die Variablen x_1, x_2 und x_3 ist der Wert von $x_3 = t$ frei wählbar. Die Werte der anderen Variablen können dann bestimmt werden.

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & t & = & t \\ x_2 & = & -e\,x_3 & = & -t\,e \\ x_1 & = & -5\,x_3 + 3\,x_2 & = & t\,(-5 - 3\,e) \end{array}$$

Alle Lösungen des entsprechenden Gleichungssystems sind somit parametrisiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5-3\,e \\ -e \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen.

Gibt es in der Treppenmatrix mehrere Zeilen von Nullen, so können auch mehrere Variablen frei gewählt werden. Es wird wiederum unendlich viele Lösungen geben, die als Funktion von mehreren Parametern geschrieben werden können. Um dies einzusehen kann folgendermassen vorgegangen werden:

1. Entferne die nur aus Nullen bestehenden Zeilen der reduzierten Matrix, sie beinhalten keinerlei Information über die Lösungen.
2. Alle Spalten des Gleichungssystems die **keine** führende 1 enthalten, sind auf die rechte Seite des Gleichungssystems zu schreiben. Sie werden zu Parametern der Lösungen.
3. Für gegebene Werte der Parameter kann nun nach den links gebliebenen Unbekannten aufgelöst werden.

Diese Schema können wir auf das vorangehende Beispiel anwenden. Die erweiterte Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -3\,x_2 & +5\,x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +e\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die Spalte der x_3 enthält keine führende 1, deshalb werden diese Terme nach rechts gebracht und $x_3 = t$ als Parameter gewählt.

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & -3\,x_2 & = & -5\,x_3 & = & -5\,t \\ & x_2 & = & -e\,x_3 & = & -e\,t \end{array}$$

Dieses System kann von unten nach oben aufgelöst werden mit dem Resultat

$$\begin{array}{rrcc} x_1 & -3\,x_2 & = & (-5-3\,e)\,t \\ & x_2 & = & -e\,t \end{array}$$

Das führt auf die oben angeschriebenen Lösungen.

Die beiden Aufgaben 4–9 und 4–10 illustrieren dieses Verhalten.

Verschiedene Anzahl von Gleichungen und Unbekannten

Diese Situation unterscheidet sich nicht wesentlich von der obigen. Zusammenfassend kann für homogene Systeme von linearen Gleichungen festgehalten werden:

- Jedes homogene, lineare Gleichungssystem hat die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
- Steht in jeder Spalte der auf Treppenform reduzierten Matrix eine „führende 1“, so hat das System nur die triviale Lösung.

- Für jede Spalte ohne „führende 1“ kann ein Parameter eingeführt werden und die unendlich vielen Lösungen damit konstruiert werden.

Die wesentliche Schwierigkeit ist es also, die Matrix auf Treppengestalt zu bringen.

4–20 Theorem : *Ein homogenes, lineares Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung ($\vec{x} = \vec{0}$). Entstehen bei der Reduktion auf Treppengestalt der erweiterten Matrix Spalten ohne „führende 1“, so hat das System unendlich viele Lösungen. Diese können mit Hilfe der reduzierten Matrix berechnet werden.*

Als Konsequenz ergibt sich sofort, dass ein homogenes System mit mehr Unbekannten als Gleichungen unendlich viele Lösungen hat.

4.3.3 Inhomogene Systeme

4–21 Definition : Sind die Zahlen $a_{i,j}$ und b_i für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ gegeben, so heisst

$$\begin{array}{ccc} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + & \ldots & + a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + & \ldots & + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

ein **inhomogenes System von linearen Gleichungen**. Es muss mindestens eine der Zahlen b_i von Null verschieden sein. Es sind m Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Die zu diesem System gehörende erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Gleich viele Gleichungen und Unbekannte

Stimmen die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten überein ($n = m$), so wird die auf Treppengestalt gebrachte Matrix meistens die folgende Form haben:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n \end{array}\right]$$

d.h.

- O unterhalb der Diagonalen
- 1 entlang der Diagonalen
- beliebige Zahlen oberhalb der Diagonalen. Diese Zahlen werden üblicherweise nicht mit den ursprünglich dort stehenden Zahlen übereinstimmen.

Das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & x_n & = & b_n \end{array}$$

ist leicht von unten nach oben lösbar. Es gibt genau eine Lösung

4–22 Beispiel : Das Beispiel 4–16 auf Seite 103 ist

$$\begin{array}{rrrcr} & -2\,y & +7\,z & = & 12 \\ 2\,x & -10\,y & +12\,z & = & 28 \\ 2\,x & -5\,y & -5\,z & = & -1 \end{array}$$

Die entsprechende, auf Treppengestalt reduzierte Matrix ist (nach längerer Rechnung)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Dieses System kann nun leicht von unten nach oben aufgelöst werden

$$\begin{array}{rcrrrcl} z & = & 2 & & & = & 2 \\ y & = & -6 & +\frac{7}{2}\,z & & = & 1 \\ x & = & 14 & -6\,z & +5\,y & = & 7 \end{array}$$

und führt auf die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

4–23 Beispiel : Die zu untersuchende Situation ist in Abbildung 4.2 aufgezeigt. Die beiden Spannungen U_1 und U_2 sind gegeben, ebenso die drei Widerstände R_i. Zu bestimmen sind die drei Ströme I_i. Dieses Beispiel stammt aus dem Buch [LandHest92].

Lösung: Die Kirchhoff'sche Stromregel, angewandt auf den Knoten A ergibt

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

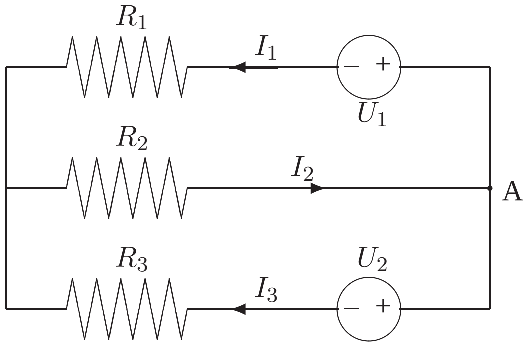


Abbildung 4.2: Ein einfaches elektrisches Netz

Die Spannungsregel, angewandt auf die obere und untere Stromschlaufe, ergibt die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} R_1\,I_1 + R_2\,I_2 &= U_1 \\ R_3\,I_3 + R_2\,I_2 &= U_2 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir drei lineare Gleichungen für drei Unbekannte

$$\begin{array}{cccl} I_1 & -I_2 & +I_3 & = 0 \\ R_1\,I_1 & +R_2\,I_2 & & = U_1 \\ & R_2\,I_2 & +R_3\,I_3 & = U_2 \end{array}$$

Für das Zahlenbeispiel $U_1 = 5\,V$, $U_2 = 18\,V$, $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$ und $R_3 = 12\,\Omega$ erhalten wir

$$\begin{array}{cccl} I_1 & -I_2 & +I_3 & = 0 \\ 8\,I_1 & +6\,I_2 & & = 5 \\ & 6\,I_2 & +12\,I_3 & = 18 \end{array}$$

Die erweiterte Matrix ist somit

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{array}\right]$$

Nun bringen wir diese Matrix zuerst auf Treppengestalt, dann auf reduzierte Treppengestalt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 14 & -8 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -36 & -37 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{36} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{36} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{34}{36} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{36} \end{array}\right]$$

Nun ist die eindeutig bestimmte Lösung $I_1 = \frac{-3}{36}\,A$, $I_2 = \frac{34}{36}\,A$ und $I_3 = \frac{37}{36}\,A$ leicht ablesbar. ♢

4–24 Beispiel : Ein Kreis mit Radius R und Mittelpunkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 &= 0 \\ x^2 - 2\,x\,x_0 + y^2 - 2\,y\,y_0 + M &= 0 \quad \text{wobei} \quad M = x_0^2 + y_0^2 - R^2 \end{aligned}$$

Sind nun drei Punkte (x, y) auf dem Kreis gegeben, so kann ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten x_0, y_0 und M aufgestellt werden. Geht der Kreis durch die Punkte $(0, 2)$, $(6, 2)$ und $(6, 4)$. Aus der Gleichung

$$x^2 - 2\,x\,x_0 + y^2 - 2\,y\,y_0 + M = 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} 0^2 - 2 \cdot 0\,x_0 + 2^2 - 2 \cdot 2\,y_0 + M &= 0 \\ 6^2 - 2 \cdot 6\,x_0 + 2^2 - 2 \cdot 2\,y_0 + M &= 0 \\ 6^2 - 2 \cdot 6\,x_0 + 4^2 - 2 \cdot 4\,y_0 + M &= 0 \end{aligned}$$

oder etwas systematischer

$$\begin{array}{cccc} M & & -4\,y_0 & = & -4 \\ M & -12\,x_0 & -4\,y_0 & = & -40 \\ M & -12\,x_0 & -8\,y_0 & = & -52 \end{array}$$

mit der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -12 & -4 & -40 \\ 1 & -12 & -8 & -52 \end{array}\right]$$

Hierbei wurde die Variable M absichtlich nach vorne geschoben, da eine Spalte von Zahlen 1 sehr günstig ist für das Verfahren von Gauss. Man erhält

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -12 & -4 & -40 \\ 1 & -12 & -8 & -52 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -12 & 0 & -36 \\ 0 & -12 & -4 & -48 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -12 & 0 & -36 \\ 0 & -12 & -4 & -48 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -12 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Somit haben wir $M = 8$, $x_0 = 3$ und $y_0 = 3$. Es ist

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 - M = 9 + 9 - 8 = 10$$

Der Kreis mit Radius $R = \sqrt{10}$ hat den Mittelpunkt bei $(3, 3)$. Eine einfache Skizze wird Sie problemlos davon überzeugen, dass die Zahlen richtig sind. ♢

4–25 Beispiel : Liegen drei Punkte auf einer Geraden, so gibt es keinen Kreis durch diese drei Punkte. Das entsprechende lineare Gleichungssystem wird also keine Lösung haben. Als Beispiel kann ein Kreis gesucht werden durch die drei Punkte $(1, 3)$, $(-1, -3)$ und $(2, 6)$. Analog zum vorangehenden Beispiel erhalten wir ein Gleichungssystem für die Unbekannten M, x_0 und y_0.

$$\begin{aligned} M + 1^2 - 2 \cdot 1\,x_0 + 3^2 - 2 \cdot 3\,y_0 &= 0 \\ M + 1^2 + 2 \cdot 1\,x_0 + 3^2 + 2 \cdot 3\,y_0 &= 0 \\ M + 2^2 - 2 \cdot 2\,x_0 + 6^2 - 2 \cdot 6\,y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Die zugehörige erweiterte Matrix ist.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & 2 & 6 & -10 \\ 1 & -4 & -12 & -40 \end{array}\right]$$

Die Reduktion auf Treppengestalt ergibt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & 2 & 6 & -10 \\ 1 & -4 & -12 & -40 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -30 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{array}\right]$$

Die dritte Gleichung des reduzierten Systems lautet somit

$$0\,M + 0\,x_0 + 0\,y_0 = 30$$

und es ist offensichtlich das diese Gleichung nicht gelöst werden kann. Das ursprüngliche System hat somit **keine Lösung**. $\diamondsuit$

4–26 Beispiel : Hat die durch das Verfahren von Gauss reduzierte Matrix die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

so steckt in der letzten Zeile keinerlei Information über die Gleichung. Das entsprechende System lautet

$$\begin{array}{rrrcr} x & -2\,y & -6\,z & = & -10 \\ & y & -3\,z & = & 7 \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{rrcrr} x & -2\,y & = & -10 & +6\,z \\ & y & = & 7 & +3\,z \end{array}$$

Es ist offensichtlich, dass $z = t$ ein freier Parameter ist. Es gibt somit unendlich viele Lösungen. Durch auflösen von oben nach unten erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= +2\,y - 10 + 6\,t = 2\,(7 + 3\,t) - 10 + 6\,t = 4 + 12\,t \\ y &= 7 + 3\,t \\ z &= t \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Geometrisch kann diese Situation entstehen, falls sich drei Ebenen im Raum in einer Geraden schneiden.

Das entsprechende homogene System von Gleichungen führt auf die reduzierte Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Die Lösung des inhomogenen Systems kann also geschrieben werden als Summe einer **partikulären Lösung** $(4\,,\,7\,,\,0)^T$ und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Diese Struktur ist nicht zufällig, sondern gilt für beliebige Systeme vom linearen Gleichungen. ♢

Die vorangehenden Beispiele führen auf das folgende Resultat.

4–27 Theorem : *Ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte hat normalerweise genau eine Lösung. Es gibt Spezialfälle ohne Lösungen, oder mit unendlich vielen Lösungen. Die auf Treppengestalt reduzierte Matrix gibt Auskunft über das Verhalten.*

1. *Befinden sich auf der Diagonalen der reduzierten Matrix nur Zahlen 1, so hat das System genau eine Lösung.*
2. *Ist die Diagonale nicht mit Zahlen 1 belegt, so gibt es eine (oder mehrere) Zeilen nur mit Nullen im linken Teil. Diese Zeilen sind zu untersuchen.*
   - *Finden Sie rechts in einer „Nullzeile“ eine von Null verschiedene Zahl, so hat das System keine Lösung.*
   - *Finden Sie rechts in einer „Nullzeile“ auch die Zahl Null, so hat das System unendlich viele Lösungen.*
   - *Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems kann geschrieben werden als Summe einer **partikulären Lösung** und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems.*

In alle obigen Fällen können die Lösungen durch auflösen „von unten nach oben“ bestimmt werden.

Unter- und über–bestimmte Gleichungssysteme

Hat ein inhomogenes Gleichungssystem mehr Unbekannte als Gleichungen, so ist nicht zu erwarten, dass es eine eindeutig bestimmte Lösung gibt. Da die entstehende Matrix breiter ist als hoch, wird es Spalten geben ohne „führende 1“. Somit wird das System unendlich viele, oder keine Lösungen haben.

4–28 Beispiel : Ein System von drei Gleichungen für vier Unbekannte kann also unendlich viele oder keine Lösung haben. Hier zwei Beispiele, wobei die Reduktion auf Treppengestalt bereits durchgeführt wurde.

- unendlich viele Lösungen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

  Die Lösungen erhält man durch auflösen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2\,x_2 & +4\,x_4 & = & \pi & -3\,x_3 \\ & x_2 & +0\,x_4 & = & 10 & +7\,x_3 \\ & & x_4 & = & -8 & \end{array}$$

  Hierbei kann der Parameter $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden.

- keine Lösung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

  Die der dritten Zeile entsprechende Gleichung lautet

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 = -8$$

  und kann somit sicher nicht gelöst werden. Es gibt keine x_i, sodass die Gleichung erfüllt ist.

◊

Hat ein inhomogenes Gleichungssystem mehr Gleichungen als Unbekannte, so wird es typischerweise keine Lösung geben. Es gibt aber Spezialfälle mit einer, oder sogar unendlich vielen Lösungen.

4–29 Beispiel : Ein System von vier Gleichungen für drei Unbekannte kann also unendlich viele oder keine Lösung haben. Hier drei Beispiele, wobei die Reduktion auf Treppengestalt bereits durchgeführt wurde.

- keine Lösung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

- genau eine Lösung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- unendlich viele Lösungen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

◊

Das Verhalten der Lösungen von unter- und überbestimmten Gleichungssystemen kann somit auch durch das Theorem 4–27 beschrieben werden.

4–30 Bemerkung :

- Es gibt mehrere systematische Verfahren (Algorithmen) um Systeme von linearen Gleichungen zu untersuchen. Bisher haben wir nur den Algorithmus von Gauss (oder Gauss–Jordan) vorgestellt. Es ist bei weitem der wichtigste Algorithmus. Er führt direkt auf die im nächsten Kapitel vorgestellte **LU–Zerlegung** einer Matrix.
- Für grosse Systeme von Gleichungen ist es wesentlich eine geeignete **Pivot–Strategie** zu wählen, damit die Resultate auch zuverlässig sind. Im hier gegebenen Rahmen müssen wir das Problem der numerischen Stabilität ignorieren.
- Für spezielle Matrizen (symmetrische, schwach besetzt, Bandstruktur, u.s.w.) gibt es spezielle, effizientere Verfahren.

♢

4.4 Aufgaben

• **Aufgabe 4–1:**
Bestimmen Sie graphisch die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x+y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

• **Aufgabe 4–2:**
Untersuchen Sie das Gleichungssystem mit geometrischen Methoden.

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2\,y = 2 \\ -2\,x & + & a\,y = b \end{array}$$

(a) Für welchen Wert von a hat das System genau eine Lösung?

(b) Für welche Werte von a und b hat das System keine Lösung?

(c) Für welche Werte von a und b hat das System unendlich viele Lösungen?

• **Aufgabe 4–3:**
Von einer Parabel der Form

$$f\,(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

ist bekannt, dass sie durch die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) geht. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die drei Unbekannten a, b und c. Verifizieren Sie, dass die erweiterte Matrix gegeben ist durch

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right]$$

• **Aufgabe 4–4:**
Stellen Sie das folgende Gleichungssystem durch einer erweiterte Matrix dar.

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

Anschliessend ist die Matrix auf Treppengestalt zu bringen und die Lösung des Gleichungssystems zu finden.

• Aufgabe 4–5:
Zeigen Sie, dass die reduzierte Treppenform einer Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

falls $a\,d - c\,d \neq 0$.

• Aufgabe 4–6:
Bringen Sie die Matrix auf Treppengestalt

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ohne Brüche zu verwenden.

• Aufgabe 4–7:
Die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Finden Sie ein solches System von **drei** Gleichungen.

• Aufgabe 4–8:
Eine Ebene E geht durch die drei Punkte $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 4)$ und $(0, 3, 0)$. Stellen Sie das Gleichungssystem auf für die Parameter a, b und c in der Ebenengleichung

$$z = a\,x + b\,y + c$$

(a) Finden Sie das Gleichungssystem.

(b) Schreiben Sie das System mit Hilfe einer erweiterten Matrix.

(c) Reduzieren Sie die Matrix auf Treppengestalt und finden Sie die Lösung.

• Aufgabe 4–9:
Wie ist im Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +a\,x_3 & = & 0 \\ & 2\,x_2 & +4\,x_3 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +2\,x_2 & +10\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

der Parameter a zu wählen, damit das System mehrere Lösungen hat? Bestimmen Sie anschliessend alle Lösungen.

• Aufgabe 4–10:

Die erweiterte Matrix des folgenden Gleichungssystem ist bereits in Treppenform.

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +0\,x_3 & +0\,x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +0\,x_3 & +0\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

(a) Finden Sie ein System von 4 linearen Gleichungen, dass zum obigen System äquivalent ist, aber keine Zeile von Nullen enthält.

(b) Setzen Sie $x_2 = t$ und $x_4 = s$ und geben Sie alle Lösungen dieses Systems von Gleichungen an in der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 4–11:

Im folgenden Gleichungssystem sind die Werte der Konstanten a und b, so dass dieses System unendlich viele Lösungen hat.

(a) Bestimmen Sie die Werte von a und b.

(b) Geben Sie alle Lösungen des Systems an.

Pour le système des équations ci–dessous les constantes a et b sont tel que le système a infiniment de solutions.

(a) Déterminer les valeurs de a et b.

(b) Trouver toutes les solution du système.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 6\,y & + & a\,z & = & b \\ 2\,x & + & 7\,y & + & 6\,z & = & 1 \\ 2\,x & + & 8\,y & + & 7\,z & = & 0 \end{array}$$

• Aufgabe 4–12:

L'équation d'un cercle est

Eine Kreisgleichung hat die Form

$$a\,(x^2 + y^2) + b\,x + c\,y + d = 0$$

Ce cercle passe par les points

Dieser Kreis geht durch die Punkte

$$P_1 = (5/3) \quad , \quad P_2 = (-2/2) \quad \text{et/und} \quad P_3 = (-1/3)$$

(a) Trouver un système d'équations pour les coefficients a, b, c et d.

(b) Écrire ce système sous la forme d'une matrice augmentée.

(c) Transformer cette matrice sous la forme d'une échelle. Tous les nombres doivent être des nombres entiers.

(d) Donner une formule explicite pour calculer **toutes** les solutions de ce système; pas besoin de calculer les solutions.

(a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die Koeffizienten a, b, c und d.

(b) Schreiben Sie dieses Gleichungssytem in der Form einer erweiterten Matrix.

(c) Bringen Sie die Matrix in Treppengestalt. Hierbei sollen alle Zahlen ganz sein.

(d) Geben Sie eine Formel um **alle** Lösungen des Gleichungssystems auszurechnen. Es ist nicht notwendig die Lösungen auszurechnen.

• Aufgabe 4–13:

Lösen Sie das komplexe Gleichungssystem mit dem Algorithmus von Gauss. Die Zwischenresultate müssen angegeben werden.

Résoudre le système d'équations linéaires complexes à l'aide de l'algorithme de Gauss. Donner les résultats intermédiaires.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & 3 & i \\ 2+i & 1+4\,i & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3\,i \\ 5+i \\ 3+9\,i \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 4–14:

Im folgenden komplexen Gleichungssystem sind die Werte der komplexen Konstanten c_1 und c_2, so dass dieses System unendlich viele Lösungen hat.

(a) Bestimmen Sie die Werte von c_1 und c_2.

(b) Geben Sie **eine** Lösung des Systems an.

Pour le système des équations complexes ci–dessous les constantes complexe c_1 et c_2 sont tel que le système a infiniment de solutions.

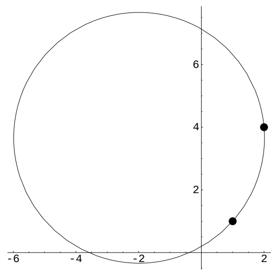
(a) Déterminer les valeurs de c_1 et c_2.

(b) Trouver **une** solution du système.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,z_1 & + & 2\,z_2 & + & 2\,z_3 & = & 0 \\ -2\,i\,z_1 & + & z_2 & + & c_1\,z_3 & = & c_2 \\ -4\,i\,z_1 & + & 2\,z_2 & + & z_3 & = & i \end{array}$$

• Aufgabe 4–15:

Ein Kreis mit Radius $R = 4$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ wird gestützt in den zwei Punkten $P_1 = (1/1)$ und $P_2 = (2/4)$. Finden Sie die y–Koordinate des höchsten Punktes des Kreises.
Un cercle avec rayon $R = 4$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ est supporté par les deux points $P_1 = (1/1)$ und $P_2 = (2/4)$. Trouver la coordonnée y du point le plus haut du cercle.



• Aufgabe 4–16:

Eine Kugel mit Radius $R = 3$ im Raum $\mathbb{R}^3$ wird gestützt in den drei Punkten

$$P_1 = (0/0/0) \quad , \quad P_2 = (2/1/0) \quad \text{und} \quad P_3 = (0/2/1)$$

Zu bestimmen ist der Mittelpunkt der Kugel.

• Aufgabe 4–17:

Für welche Werte von λ hat das folgende Gleichungssystem nichttriviale Lösungen?

$$\begin{array}{rcl} (3-\lambda)\,x & +3\,y & = 0 \\ x & +(2-\lambda)\,y & = 0 \end{array}$$

4.4.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 4–1 : Es sind zwei Geraden mit Steigungen ± 1 zu zeichnen. der Schnittpunkt ist bei $(x, y) = (3, 1)$.

Lösung zu Aufgabe 4–2 :

(a) Die Geraden sind parallel falls $a = -4$. Für $a \neq -4$ gibt es somit genau einen Schnittpunkt.

(b) Für $a = -4$ erhalten wir das System

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2\,y = 2 \\ -2\,x & - & 4\,y = b \end{array}$$

Die beiden Geraden liegen übereinander falls auch $b = -4$. Somit gibt es keine Lösungen bei $a = -4$ und $b \neq -4$.

(c) Es gibt unendlich viele Lösungen bei $a = -4$ und $b = -4$.

Lösung zu Aufgabe 4–4 : Die erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & + & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Nach dem Anwenden des Algorithmus von Gauss ergibt sich

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & + & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

und die eindeutig bestimmte Lösung ist

$$(x, y, z) = (1\,,\,2\,,\,3)$$

Lösung zu Aufgabe 4–6 : Ein möglicher Rechnungsweg ist

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -15 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–7 : Offensichtlich kann $z = t$ als Parameter gewählt werden. Die folgende reduzierte Matrix ergibt die gewünschten Lösungen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nun können (bei Bedarf) noch einige Zeilenoperationen ausgeführt werden

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 0 & -39 & 13 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Ein passendes Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{cccccc} 13\,x & & -39\,z & = & 13 \\ & -2\,y & -4\,z & = & 6 \\ x & +y & -z & = & -2 \end{array}$$

Zu dieser Aufgabe gibt es viele verschiedene richtige Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 4–8 :

(a)

$$\begin{array}{ccccc} 1\,a & +2\,b & +c & = & 3 \\ -2\,a & +3\,b & +c & = & 4 \\ 0\,a & +3\,b & +c & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(c) Die Rechnungen (ohne Zeilenvertauschen) ergeben die reduzierte Matrix

Mathematica

```
mat={{1,2,1,3},{-2,3,1,4},{0,3,1,0}}
mat=Pivot[mat,1,1]
mat=Pivot[mat,2,2]
mat=Pivot[mat,3,3]
```

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right]$$

Einsetzen „von unten nach oben“ ergibt die eindeutig bestimmte Lösung

$$c = 15 \quad , \quad b = -5 \quad \text{und} \quad a = -2$$

Die Ebenengleichung ist somit

$$z = -2\,x - 5\,y + 15$$

Man sollte nun überprüfen, dass die Punkte $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 4)$ und $(0, 3, 0)$ tatsächlich auf dieser Ebene liegen.

Lösung zu Aufgabe 4–9 : Die Darstellung durch eine erweiterte Matrix und Reduktion auf Treppengestalt liefert

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 10-3\,a & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12-3\,a & 0 \end{array}\right]$$

Damit das System unendlich viele Lösungen hat, darf die unterste Zeile nur 0 enthalten, d.h. $12-3\,a=0$. Somit muss $a=4$ sein. In der Lösung ist $x_3=t$ frei wählbar. Es gilt $x_2=-2\,x_3=-2\,t$ und $x_1=-x_2-a\,x_3=t\,(2-a)$. Somit sind alle Lösungen gegeben durch

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 2-a \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t\in\mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 4–10 :

(a) Ein einfaches Beispiel kann erzeugt werden, indem die erste Gleichung zur dritten und vierten addiert wird. anschliessend wird das doppelte der zweiten Zeile von der vierten subtrahiert. Eine Reduktion auf Treppengestalt mit dem Verfahren von Gauss wird das ursprüngliche System wieder herstellen.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -9\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

(b) Das ursprüngliche System kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +3\,x_3 & = & -x_2 & +x_4 \\ & x_3 & = & 0\,x_2 & -4\,x_4 \end{array}$$

In dieser Form ist offensichtlich, dass nach x_1 und x_3 aufgelöst werden kann. Mit $x_2=t$ und $x_4=s$ erhält man

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +3\,x_3 & = & -t & +s \\ & x_3 & = & & -4s \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & = & -t & -11\,s \\ & x_3 & = & & -4s \end{array}$$

und somit

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–11 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & a & b \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & a & b \\ 0 & 1 & 6-a & 1-b \\ 0 & 2 & 7-a & -b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a/2 & b/2 \\ 0 & 1 & 6-a & 1-b \\ 0 & 0 & a-5 & b-2 \end{array}\right]$$

(a) Damit das System unendlich viele Lösungen hat muss $a = 5$ und $b = 2$ sein. Die reduzierte Matrix hat dann die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{ccccccc} x & + & 3\,y & + & \frac{5}{2}\,z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

(b) Die dritte Variable $z = t \in \mathbb{R}$ kann frei gewählt werden. Dann liest man ab, dass $y = -1 - z = -1 - t$ und $x = 1 - 3\,y - \frac{5}{2}\,z = 1 + 3 + 3\,t - \frac{5}{2}\,t = 4 + \frac{1}{2}\,t$. Die Lösung ist somit eine Gerade im Raum $\mathbb{R}^3$, parametrisiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–12 :

(a)

$$\begin{aligned} a\,34 + b\,5 + c\,3 + d &= 0 \\ a\,8 - b\,2 + c\,2 + d &= 0 \\ a\,10 - b\,1 + c\,3 + d &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(c) Matrix auf Treppengestalt reduzieren.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_2 \to Z_2 - \frac{8}{34}\,Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 - \frac{10}{34}\,Z_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 - \frac{40}{34} & 2 - \frac{24}{34} & 1 - \frac{8}{34} & 0 \\ 0 & -1 - \frac{50}{34} & 3 - \frac{30}{34} & 1 - \frac{10}{34} & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_2 \to 34\,Z_2 \\ Z_3 \to 34\,Z_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & -84 & 72 & 24 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to Z_3 - \frac{84}{108}\,Z_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 72-\frac{84\cdot 44}{108} & 24-\frac{84\cdot 26}{108} & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to 108\ Z_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 108\cdot 72-84\cdot 44 & 108\cdot 24-84\cdot 26 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to 108\ Z_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 4080 & 408 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to \frac{1}{408}\ Z_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(d) Der Wert von d kann frei gewählt werden. Aus dem obigen Gleichungssystem lassen sich dann der Reihe nach c, b und a bestimmen.

$$\begin{aligned} c &= \frac{-1}{10}\,d \\ b &= \frac{1}{108}\,(44\,c+26\,d) \\ a &= \frac{-1}{34}\,(5\,b+3\,c+d) \end{aligned}$$

Alternative Lösung:
Reduziert man die Matrix auf **untere Treppengestalt**, so werden die Zahlen und Rechnungen **viel einfacher**.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1 - Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 - Z_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 24 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1/6 \\ Z_2 \to -Z_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Hier kann a beliebig gewählt werden und dann die anderen Gleichungen bestimmt werden durch

$$\begin{aligned} b &= -4\,a \\ c &= -b - 2\,a \\ d &= -3\,c + b - 10\,a \end{aligned}$$

Die beiden Lösungswege sind äquivalent.

Lösung zu Aufgabe 4–13 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ i & 3 & i & 5+i \\ 2+i & 1+4\,i & i & 3+9\,i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ 0 & 3-2\,i & -2\,i & 8-4\,i \\ 0 & -3+2\,i & -6-2\,i & -4-2\,i \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ 0 & 3-2\,i & -2\,i & 8-4\,i \\ 0 & 0 & -6-4\,i & 4-6\,i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ 0 & 3-2\,i & -2\,i & 8-4\,i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{array}\right]$$

Die letzte Matrix entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} z_1 & +2\,z_2 & +3\,z_3 & = & 5+3\,i \\ & (3-2\,i)\,z_2 & -2\,i\,z_3 & = & 8-4\,i \\ & & z_3 & = & i \end{array}$$

Dieses System kann nun leicht von unten nach oben aufgelöst werden

$$z_3 = i \quad , \quad z_2 = 2 \quad , \quad z_1 = 1$$

Lösung zu Aufgabe 4–14 : Mittels erweiterter Matrizen und Reduktion auf Treppengestalt erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2\,i & 1 & c_1 & c_2 \\ -4\,i & 2 & 1 & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2\,i & c_1+2\,i & c_2 \\ 0 & 2+4\,i & 1+4\,i & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2\,i & c_1+2\,i & c_2 \\ 0 & 0 & 1-2\,c_1 & i-2\,c_2 \end{array}\right]$$

(a) Damit das System unendlich viele Lösungen hat muss $c_1 = 1/2$ und $c_2 = i/2$ sein. Die reduzierte Matrix hat dann die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2\,i & 1/2+2\,i & i/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2+4\,i & 1+4\,i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(b) Das entsprechende Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_1 & + & z_2 & + & z_3 & = & 0 \\ & & (2+4\,i)\,z_2 & + & (1+4\,i)\,z_3 & = & i \end{array}$$

Die dritte Variable $z_3 \in \mathbb{C}$ kann frei gewählt werden. Die einfachste Wahl ist sicher $z_3 = 0$. Dann liest man ab, dass

$$z_2 = \frac{i}{2+4\,i} \quad \text{und} \quad z_1 = -z_2 = \frac{-i}{2+4\,i} = \frac{-i\,(2-4\,i)}{2^2+4^2} = \frac{-4-2\,i}{20}$$

Lösung zu Aufgabe 4–15 : 1. Lösungsmöglichkeit Die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt bei (u, v) ist

$$\begin{aligned} (x-u)^2 + (y-v)^2 &= R^2 \\ x^2 - 2\,x\,u + u^2 + y^2 - 2\,y\,v + v^2 &= R^2 \\ -2\,x\,u - 2\,y\,v + u^2 + v^2 &= R^2 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Dies ist **keine** lineare Gleichung, wegen den qudratischen Termen. Mit der „neuen“ Unbekannten $M = u^2 + v^2$ kann dies als lineare Gleichung für die Unbekannten u, v und M aufgefasst werden.

$$-2\,x\,u - 2\,y\,v + M = R^2 - x^2 - y^2$$

Wir kennen zwei Punkte, welche diese Gleichung erfüllen und erhalten somit das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rrrcr} -2\,u & -2\,v & +M & = & 14 \\ -4\,u & -8\,v & +M & = & -4 \end{array}$$

Die entsprechende erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -2 & 1 & 14 \\ -4 & -8 & 1 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \frac{-1}{2} & -7 \\ 1 & 2 & \frac{-1}{4} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \frac{-1}{2} & -7 \\ 0 & 1 & \frac{+1}{4} & 8 \end{array}\right]$$

Die Variable M kann frei gewählt werden und wir erhalten dann

$$\begin{aligned} v &= 8 - \frac{1}{4}\,M \\ u &= -7 + \frac{1}{2}\,M - v = -15 + \frac{3}{4}\,M \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen können nun in $M = u^2 + v^2$ eingesetzt werden und man erhält eine quadratische Gleichung für M.

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{-60 + 3\,M}{4}\right)^2 + \left(\frac{32 - M}{4}\right)^2 \\ 16\,M &= (9+1)\,M^2 - (360 + 64)\,M + 60^2 + 32^2 \\ 0 &= 10\,M^2 - 440\,M + 4624 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung kann gelöst werden mit den beiden Lösungen

$$M_{1,2} = \frac{2\,(55 \pm 3\,\sqrt{15})}{5}$$

Aus der Figur ist ersichtlich, dass der grössere der beiden möglichen Werte der Koordinate v zu wählen ist. Deshalb

$$v = 8 - \frac{1}{4}\,M = 8 - \frac{1}{4}\,\frac{2\,(55 - 3\,\sqrt{15})}{5} \approx 3.6619$$

Der höchste Punkt liegt um R höher als der Mittelpunkt, d.h. auf der Höhe $h \approx 7.6619$. Es gilt (ohne Rechnung) $u \approx -1.98569$.

2. Lösungsmöglichkeit Der Mittelpunkt der Kreises muss auf der Mittelsenkrechten der beiden Punkte liegen. Eine Parametrisierung dieser Geraden ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t\,\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt muss einen Abstand von $R = 4$ vom Punkt $(1, 1)$ haben. Das ergibt die Gleichung

$$16 = \left\| \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t\,\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.5 - 3\,t \\ 1.5 + t \end{pmatrix} \right\|^2 = (0.5 - 3\,t)^2 + (1.5 + t)^2$$

Das führt auf die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} 16 &= \frac{1}{4} - 3\,t + 9\,t^2 + \frac{9}{4} + 3\,t + t^2 \\ 0 &= 10\,t^2 + 104 - 16 = 10\,t^2 - 544 \\ t_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{54}{40}} = \pm\sqrt{\frac{27}{20}} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Eine Zeichnung zeigt, dass die positive Lösung die Richtige ist und wir erhalten die Mitelpunktskoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.98569 \\ 3.6619 \end{pmatrix}$$

Der höchste Punkt ist noch um $R = 4$ nach oben verschoben und hat somit die Koordinaten $(-1.98569 \,/\, 7.6619)$.

Lösung zu Aufgabe 4–16 : Die Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt bei (u, v, w) ist

$$\begin{aligned} (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 &= R^2 \\ x^2 - 2\,x\,u + u^2 + y^2 - 2\,y\,v + v^2 + z^2 - 2\,z\,w + w^2 &= R^2 \\ -2\,x\,u - 2\,y\,v - 2\,z\,w + u^2 + v^2 + w^2 &= R^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \end{aligned}$$

Dies ist **keine** lineare Gleichung, wegen den qudratischen Termen. Mit der „neuen“ Unbekannten $M = u^2 + v^2 + w^2$ kann dies als lineare Gleichung für die Unbekannten u, v, w und M aufgefasst werden.

$$-2\,x\,u - 2\,y\,v - 2\,z\,w + M = R^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Wir kennen drei Punkte, welche diese Gleichung erfüllen und erhalten somit das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rrrrcl} 0\,u & +0\,v & +0\,w & +M & = & 9 \\ -4\,u & -2\,v & +0\,w & +M & = & 4 \\ 0\,u & -4\,v & -2\,w & +M & = & 4 \end{array}$$

Indem wir die erste Gleichung von der zweiten und dritten subtrahieren, wird daraus sofort ein System von zwei Gleichungen für drei Unbekannte

$$\begin{array}{rrrcl} 4\,u & +2\,v & & = & 5 \\ & 4\,v & +2\,w & = & 5 \end{array}$$

Dieses System hat bereits Dreiecksgestalt und kann von unten nach oben aufgelöst werden. Hierbei kann $w = t$ als freier Parameter gewählt werden.

$$\begin{aligned} v &= \frac{5}{4} - \frac{t}{2} = \frac{5 - 2\,t}{4} \\ u &= \frac{5}{4} - \frac{v}{2} = \frac{5}{4} - \frac{5 - 2\,t}{8} = \frac{5 + 2\,t}{8} \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{-2}{8} \\ \frac{-2}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist offensichtlich die Parametrisierung einer Geraden im Raum. Ist die mögliche Lage aller Kugelmittelpunkte. Der Radius wird aber nicht 3 sein. Diese Gerade kann erzeugt werden als Schnittgerade der mittelsenkrechten Ebenen der drei gegebenen Punkte.

Diese Beziehungen können nun in der ersten Gleichung eingesetzt werden um den Mittelpunkt mit dem richtigen Radius zu finden.

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= M = 9 \\ \frac{(5 + 2\,t)^2}{64} + \frac{(5 - 2\,t)^2}{16} + t^2 &= 9 \\ 25 + 20\,t + 4\,t^2 + 4\,(25 - 20\,t + 4\,t^2) + 64\,t^2 &= 9 \cdot 64 \\ t^2\,(4 + 16 + 64) + t\,(20 - 80) + 25 + 100 - 9 \cdot 64 &= 0 \\ t^2\,84 - t\,60 - 451 &= 0 \\ t_{1,2} = w_{1,2} &= \frac{1}{42}\left(15 \pm 4\,\sqrt{606}\right) \end{aligned}$$

Da die Kugel gestützt wird durch die drei Punkte, muss sie oberhalb der Punkte liegen. Somit kommt nur die positive Lösung von w in Frage und wir erhalten

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{42}\,\left(30+\sqrt{606}\right)\approx 1.30041\\
v &= \frac{1}{42}\,\left(45-2\,\sqrt{606}\right)\approx -0.100813\\
w &= \frac{1}{42}\,\left(15+4\,\sqrt{606}\right)\approx 2.70163
\end{aligned}$$

Die Aufgabe kann auch mit *Mathematica* gelöst werden

Mathematica

```
eq[x_,y_,z_] := (x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2 ==9
eq1=eq[0,0,0];
eq2=eq[2,1,0];
eq3=eq[0,2,1];
sol=Solve[{eq1,eq2,eq3}]
N[sol]
```

Lösung zu Aufgabe 4–17 : Die erweiterte Matrix und deren Reduktion auf Treppengestalt ergeben.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3-\lambda & 3 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{3-\lambda} & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{3-\lambda} & 0\\ 0 & \left(2-\lambda-\frac{3}{3-\lambda}\right) & 0\end{array}\right]$$

Damit das System nichttriviale Lösungen hat, muss die zweite Zeile nur aus Nullen bestehen, d.h.

$$2-\lambda-\frac{3}{3-\lambda}$$

Das führt auf die quadratische Gleichung

$$(2-\lambda)\,(3-\lambda)-3=\lambda^2-5\,\lambda+3=0$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\,\left(5\pm\sqrt{25-12}\right)$$

Diese beiden Werte $\lambda_{1,2}$ heissen auch Eigenwerte der Matrix

$$\left[\begin{array}{cc} 3 & 3\\ 1 & 2\end{array}\right]$$

4.5 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Systeme von zwei und drei linearen Gleichungen geometrisch intepretieren können.
- Systeme von linearen Gleichungen von Hand und mit geeigneten Hilfsmitteln zuverlässig lösen können.
- den Gauss'schen Algorithmus gut verstehen.
- das Verhalten von Lösungen von homogenen und inhomogenen linearen Gleichungssystemen beschreiben können.

Kapitel 5

Matrizen und die LU–Zerlegung

5.1 Elementaroperationen und die LU–Zerlegung

In diesem Abschnitt werden wir ein Verfahren kennen lernen um lineare Gleichungssysteme zu lösen oder inverse Matrizen effizient zu bestimmen. Die vorgestellten Verfahren bilden die Grundlage für in Taschenrechnern oder Mathematikprogrammen verwendeten Verfahren.

5.1.1 Elementaroperationen und Elementarmatrizen

5–1 Definition : Es gibt drei Typen von **elementaren Zeilenoperationen**:

1. Multiplikation einer Zeile mit einer von Zahl c, wobei $c \neq 0$.
2. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
3. Vertauschen von zwei Zeilen.

Analog können elementare Spaltenoperationen festgelegt werden.

5–2 Definition : Eine **Elementarmatrix** entsteht aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ durch eine elementare Zeilen/Spalten–Operation.

5–3 Theorem :

- *Entsteht eine Elementarmatrix E durch eine elementare **Zeilen**operation aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$, dann entsteht die Matrix $E\,A$ aus der Matrix A durch die selbe **Zeilen**operation.*
- *Entsteht eine Elementarmatrix E durch eine elementare **Spalten**operation aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$, dann entsteht die Matrix $A\,E$ aus der Matrix A durch die selbe **Spalten**operation.*

$$\begin{array}{rclcrl} \mathbb{I}_n \longrightarrow E & \text{durch eine Zeilenop.} & \Longrightarrow & A \longrightarrow E\,A & \text{durch dieselben Zeilenop.} \\ \mathbb{I}_n \longrightarrow E & \text{durch eine Spaltenop.} & \Longrightarrow & A \longrightarrow A\,E & \text{durch dieselben Spaltenop.} \end{array}$$

5–4 Beispiel : Die Matrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

entsteht aus $\mathbb{I}_3$ durch eine elementare Zeilen- oder Spalten-Operation und ist somit eine Elementarmatrix. Mit ihrer Hilfe kann die dritte Zeile oder Spalte einer Matrix mit 3 multipliziert werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 18 \\ 7 & 8 & 27 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

5–5 Beispiel : Die Matrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entsteht aus $\mathbb{I}_3$ durch eine elementare Zeilen- oder Spalten-Operation und ist somit eine Elementarmatrix. Mit ihrer Hilfe kann die dritte Zeile oder Spalte einer Matrix mit 3 multipliziert werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -14 & -15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

5–6 Beispiel : Elementarmatrizen können sehr leicht invertiert werden, indem man die entsprechenden Zeilen (oder Spalten) Operationen wieder rückgängig macht. Hier einige Beispiele

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fast alle Elementarmatrizen sind invertierbar. Einzig falls eine Zeile (oder Spalte) mit Null multipliziert wird, kann die Operation nicht rückgängig gemacht werden. $\diamondsuit$

In Aufgabe 5–1 ist zu zeigen, dass eine Dreiecksmatrix als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann. Dadurch lassen sich Dreicksmatrizen auch leicht invertieren.

5–7 Beispiel : Permutationsmatrizen
Ensteht eine Elementarmatrix durch vertauschen zweier Zeilen (oder) Spalten, so heisst sie auch **Permutationsmatrix**. Zwei Beispiele von elementaren Permutationsmatrizen sind

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

P_1 entsteht durch vertauschen der ersten und dritten Zeile (oder Spalte). P_2 entsteht durch vertauschen der zweiten und vierten Zeile (oder Spalte).

Elementare Permutationsmatrizen sind leicht invertierbar: die inverse Matrix ist gegeben durch die Matrix selbst. Mit den obigen beiden Beispielen gilt

$$P_1 \cdot P_1 = \mathbb{I}_4 \quad \text{und} \quad P_2 \cdot P_2 = \mathbb{I}_4$$

Auch wenn mehrere Vertauschungen ausgeführt werden spricht man von Permutationsmatrizen. So ist

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eine Permutationsmatrix, aber keine Elementarmatrix. Eine beliebige Permutationsmatrix P ist charakterisiert durch die folgenden Eigenschaften.

- Alle Einträge in P sind 1 oder 0.
- In jeder Zeile befindet sich genau einen Zahl 1 .
- In jeder Spalte befindet sich genau einen Zahl 1 .

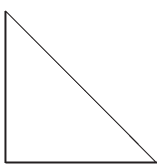
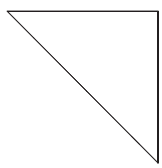
Man kann zeigen, dass jede Permutationsmatrix aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ erzeugt werden kann durch mehrere Zeilenvertauschungen (siehe Aufgabe 5–2). ♢

5.1.2 Die LU–Zerlegung löst Gleichungssysteme

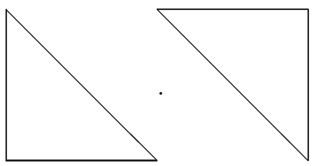
Im vorangehenden Kapitel wurden Systeme von linearen Gleichungen mit Hilfe von elementaren Zeilenoperationen gelöst. Nun wird aufgezeigt, das dieser Prozess zur Zerlegung einer Matrix als Produkt von zwei Dreiecksmatrizen führt. Wir werden zuerst aufzeigen, dass damit das lineare Gleichungssystem so gut wie gelöst ist. Als Konsequenz des letzten Abschnittes kann die **LU–Zerlegung** einer Matrix besprochen werden. In Programmbibliotheken ist dieses Verfahren oft implementiert. So finden Sie zum Beispiel in [Pres92] und [Pres86] Pascal und C Programme.

Die LU–Zerlegung (manchmal auch LR–Zerlegung) einer quadratischen Matrix ist die bekannteste Form einer Zerlegung. Man schreibt die Matrix A als Produkt einer Links–Matrix L mit einer Rechts–Matrix U. Ist diese Zerlegung geglückt, so kann ein Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{b}$ leicht gelöst werden. Diese Tatsache kann graphisch illustriert werden:

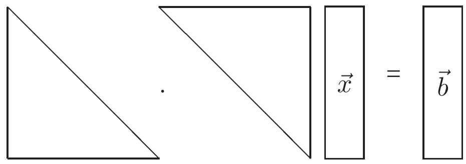
L und U sind Dreiecksmatrizen, alle Zahlen in der Matrix, ausserhalb eines Dreiecks, sind Null.

L =  und U = 

Wegen $A = L\,U$ gilt

A = 

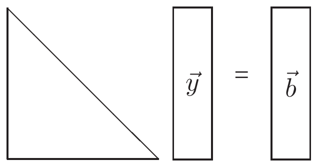
Das System $A\,\vec{x} = L\,U\,\vec{x} = \vec{b}$ entspricht der Graphik



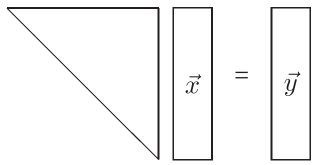
Das Gleichungssystem wird nun in zwei Schritten bearbeitet

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} L\,\vec{y} &=& \vec{b} \\ U\,\vec{x} &=& \vec{y} \end{array}$$

Zuerst wird das Gleichungssystem $L\,\vec{y} = \vec{b}$ von oben nach unten nach $\vec{y}$ aufgelöst (Vorwärtseinsetzen).



Anschliessend kann $U\,\vec{x} = \vec{y}$ von unten nach oben nach $\vec{x}$ aufgelöst werden (Rückwärtseinsetzen).



Aufgrund der obigen Erläuterungen sollte klar sein, dass mit Hilfe der LU–Zerlegung Systeme von linearen Gleichungen gelöst werden können. In nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie diese Zerlegung konstruiert werden kann.

5.1.3 LU–Zerlegung und der Algorithmus von Gauss

Bringen Sie eine Matrix mit Hilfe des Algorithmus von Gauss auf Treppengestalt, so führen Sie unbewusst eine LU–Zerlegung durch. Wir ignorieren das (eventuell notwendige) Vertauschen von Zeilen und illustrieren das Verfahren anhand eines Beispiels aus [AntoRorr91, p. 443]. Berücksichtigt man das Pivotieren, was für grosse Matrizen unumgänglich ist, so sind zusätzlich noch Permutationsmatrizen zu berücksichtigen.

Wir untersuchen als typisches Beispiel ein System mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Wollen wir diese Matrix auf Treppengestalt reduzieren, so können die folgenden Elementarschritte ausgeführt werden

1. erste Zeile durch 2 dividieren
2. das 3–fache der ersten Zeile zur zweiten addieren
3. das 4–fache der ersten Zeile von der dritten subtrahieren
4. das 3–fache der ersten Zeile zur dritten addieren
5. die dritte Zeile durch 7 dividieren

Diese Schritte sind in der linken Spalte der Figur 5.1 illustriert. Rechts finden Sie die Matrizen um die Elementaroperationen durch Matrizenmultiplikationen auszuführen.

Die Zeilenoperationen in Figur 5.1 werden wir nun mit Hilfe von Multiplikationen von Elementarmatrizen interpretieren. Wir schreiben die Matrix A künstlich als Produkt $A = \mathbb{I}_3 \cdot A$ und fügen zwischen die beiden Faktoren

Reduktion auf Treppengestalt	Elementarmatrix der Zeilenoperation	Inverse Matrix der Elementarmatrix
$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$Z_1 \leftarrow \frac{1}{2}\, Z_1$	
$\downarrow$	$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$Z_2 \leftarrow Z_2 + 3\, Z_1$	
$\downarrow$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$Z_3 \leftarrow Z_3 - 4\, Z_1$	
$\downarrow$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$	$Z_3 \leftarrow Z_3 + 3\, Z_2$	
$\downarrow$	$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	$Z_3 \leftarrow \frac{1}{7}\, Z_3$	
$\downarrow$	$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$	$E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		

Abbildung 5.1: Beispiel einer LU–Zerlegung einer Matrix

Terme $\mathbb{I}_3 = E_i^{-1} \cdot E_i$ ein. Der Faktor E_i wirkt als Zeilenoperation auf den rechten Faktor, der Term E_i^{-1} wirkt als Spaltenoperation auf den linken Faktor.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_1^{-1} \cdot E_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2^{-1} \cdot E_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3^{-1} \cdot E_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_4^{-1} \cdot E_4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad E_5^{-1} \cdot E_5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \cdot \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Matrix A zerlegt als

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L \cdot U$$

5.1.4 Bestimmen der inversen Matrix

Bei der Zerlegung von $A = L \cdot U$ wurden Zeilenoperationen ausgeführt, indem die Matrix A von links mit Elementarmatrizen multipliziert wurde. Die selben Operationen können auch mit der Einheitsmatrix $\mathbb{I}$ ausgeführt werden. Das führt zu

$$\begin{aligned}
A \cdot A^{-1} &= \mathbb{I} \\
E_1 \cdot A \cdot A^{-1} &= E_1 \cdot \mathbb{I} \\
E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} &= E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I} \\
E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} &= E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I} \\
U \cdot A^{-1} &= E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I}
\end{aligned}$$

Die obere Dreiecksmatrix U kann durch drei weiter Elementaroperationen auf die Einheitsmatix reduziert werden, d.h.

$$E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \cdot U = E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\mathbb{I} \cdot A^{-1} = E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \cdot E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1$$

Indem die selben Zeilenoperationen nicht nur auf A, sondern auch auf der Einheitsmatrix ausgeführt werden, entsteht die inverse Matrix A^{-1}. Nun können wir in der obigen Formel für A^{-1} einen Algorithmus ablesen um die inverse Matrix zu berechnen:

1. Starte mit der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$.
2. Während der LU–Zerlegung der Matrix A ist jede Zeilenoperation auch auf die obige Matrix anzuwenden.
3. Nach der LU–Zerlegung ist die Rechtsmatrix U durch Zeilenoperationen auf Diagonalgestalt zu bringen und die passenden Operationen sind auf die obige Matrix anzuwenden.
4. Als Resultat entsteht die inverse Matrix A^{-1} in der rechten Hälfte der erweiterten Matrix.

Dieses Verfahren kann mit Hilfe einer erweiterten Matrix noch geschickt dargestellt werden. In hier untersuchten Beispiel ergeben sich die folgenden Rechnungen. Mit den zur Verfügung stehenden modernen Hilfsmitteln wird man kaum mehr in die Lage kommen viele solche Rechnungen von Hand ausführen zu müssen. Trotzdem ist es nützlich zu wissen, worauf zugrundeliegenden Algorithmen aufbauen. Deshalb sei hier ein Beispiel mit allen Rechendetails vorgeführt. Bestimmt wird die inverse Matrix von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \frac{1}{2}\,Z_1 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_2 + 3\,Z_1 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 - 4\,Z_1 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 + 3\,Z_2 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \frac{5}{2} & 3 & 1 \end{array}\right] \qquad \frac{1}{7}\,Z_3 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \qquad Z_2 - 3\,Z_3 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \qquad Z_1 - Z_3 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{2}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \qquad Z_1 - 3\,Z_2 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-16}{14} & \frac{+3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

Somit gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -16 & 6 & 16 \\ 6 & -4 & -6 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

5–8 Theorem : *Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent (gleichwertig):*

(a) *A ist invertierbar.*

(b) *Das lineare Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.*

(c) *Die Matrix A kann geschrieben werden als Produkt zweier Dreiecksmatrizen $A = L\,U$. In den Diagonalen der Matrizen L und U sind alle Einträge von Null verschieden.*

(d) *Die Matrix A ist zeilenäquivalent zur Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$.*

Beweis : Wir zeigen eine geschlossene Implikationskette $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)$.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Da A invertierbar ist gibt es eine inverse Matrix A^{-1} mit $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = \mathbb{I}_n$. Ist nun $\vec{x}$ eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$ so kann diese Gleichung von links mit A^{-1} multipliziert werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A\,\vec{x} &= A^{-1}\,\vec{0} \\ \mathbb{I}_n\,\vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Somit hat $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Da das System $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nur die Lösung $\vec{0}$ hat, kann der Gauss–Algorithmus vollständig ausgeführt werden und A wird also in die Form $A = L\,U$ umgeschrieben.

$(c) \Longrightarrow (d)$ Die Dreiecksmatrizen L und U können je als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden, und somit auch $A = L\,U$.

$(d) \Longrightarrow (a)$ A kann als endliches Produkt von invertierbaren Elementarmatrizen geschrieben werden, d.h.

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_m = \prod_{i=1}^{m} E_i$$

Die einzelnen Elementarmatrizen sind offensichtlich invertierbar und wir können die obige Gleichung der Reihe nach von links mit den Matrizen E_1^{-1}, E_2^{-1}, $E_3^{-1} \ldots E_m^{-1}$ multiplizieren

$$\begin{aligned} E_1^{-1} \cdot A &= E_1^{-1} \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_m = E_2 \cdot \ldots \cdot E_m = \prod_{i=2}^{m} E_i \\ E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot A &= E_3 \cdot E_4 \cdot \ldots \cdot E_m = \prod_{i=3}^{m} E_i \\ E_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot A &= E_m \\ E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot A &= \mathbb{I}_n \end{aligned}$$

Multipliziert man A der Reihe nach von rechts mit E_m^{-1}, $E_{m-1}^{-1} \ldots E_1^{-1}$ so ergibt sich mit einer sehr ähnlichen Rechnung

$$A \cdot E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Deshalb ist die inverse Matrix gegeben durch

$$A^{-1} = E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1}$$

□

In der Definition der inversen Matrix A^{-1} werden die **beiden** Eigenschaften

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_n$$

verlangt. Mit Hilfe des obigen Theorems kann man zeigen, dass eine der beiden genügt.

5–9 Satz : *Sei A eine $n \times n$–Matrix und B eine Matrix gleicher Grösse. Dann gilt*

(a) Gilt $B \cdot A = \mathbb{I}_n$ so ist A invertierbar und $A \cdot B = \mathbb{I}_n$ und $B = A^{-1}$.

(b) Gilt $A \cdot B = \mathbb{I}_n$ so ist A invertierbar und $B \cdot A = \mathbb{I}_n$ und $B = A^{-1}$.

Beweis :

(a) Wir zeigen dazu zuerst, dass A invertierbar ist. Sei $\vec{x}$ eine Lösung von $A\,\vec{x} = \vec{0}$. Dann multiplizieren wir diese Gleichung von links mit B und erhalten $B \cdot A\,\vec{x} = B\,\vec{0}$ und somit erhalten wir wegen $B \cdot A = \mathbb{I}_n$ auch $\mathbb{I}_n\,\vec{x} = \vec{0}$. Deshalb hat $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Aufgrund des vorangehenden Theorems ist die Matrix A invertierbar und wir erhalten

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \mathbb{I}_n \\ B \cdot A \cdot A^{-1} &= \mathbb{I}_n \cdot A^{-1} \\ B &= A^{-1} \end{aligned}$$

(b) Wir müssen noch zeigen, dass $B \cdot A = \mathbb{I}_n$. Gilt $A \cdot B = \mathbb{I}_n$, so ist aufgrund des Beweises des ersten Teils B invertierbar und $B^{-1} = A$. Nun können wir die Gleichung $A \cdot B = \mathbb{I}_n$ von rechts mit A multiplizieren und erhalten $B \cdot A = B \cdot B^{-1} = \mathbb{I}_n$. Damit erfüllt B beide Eigenschaften der inversen Matrix von A und es gilt also $A^{-1} = B$

□

5.1.5 Lösen von Gleichungssystemen, Rechenaufwand

Ist nun ein lineares Gleichungssystem von n für n Unbekannte.

$$A\,\vec{x} = \vec{b}$$

zu lösen, so löst man die beiden einfach lösbaren Systeme (Dreicksmatrizen)

$$\begin{aligned} L\,\vec{y} &= \vec{b} \\ U\,\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

und es gilt

$$A\,\vec{x} = L\,U\,\vec{x} = L\,\vec{y} = \vec{b}$$

d.h. wir haben das ursprüngliche System in zwei Schritten gelöst. Das Lösen der Gleichung $L\,\vec{y} = \vec{b}$ heisst auch **Vorwärtseinsetzen**, die Gleichungen können von „oben nach unten“ durch Einsetzen gelöst werden. Das Lösen der Gleichung $U\,\vec{x} = \vec{y}$ heisst auch **Rückwärtseinsetzen**, die Gleichungen können von „unten nach oben“ durch Einsetzen gelöst werden.

Nun versuchen wir den Rechenaufwand für diese Operationen abzuschätzen. Eine **Operation** soll hierbei aus einer Multiplikation und einer Addition bestehen. Wir versuchen ein System von n linearen Gleichungen für n Unbekannte zu lösen. Geht man den Algorithmus von Gauss Zeile für Zeile durch, so kann die Anzahl der notwendigen Operationen für die LU–Zerlegung gezählt werden, ebenso beim Vor- und Rückwärtseinsetzen.

Lösen einer einzelnen Gleichung

1. Berechnen der Zerlegung $A = L\,U$.

   - Um mit Hilfe der ersten Zeile in der ersten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-1)^2$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen zweiten Zeile in der zweiten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-2)^2$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen dritten Zeile in der dritten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-3)^2$ Operationen ausgeführt werden.

   Als Rechenaufwand für $n \times n$–Matrizen A erhalten wir für grosse Werte von n

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2\,n-1)}{6} \approx \frac{1}{3}\,n^3$$

2. Vorwärtseinsetzen $L\,\vec{y} = \vec{b}$: Aufwand für grosse Werte von n

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^2$$

3. Rückwärtseinsetzen $U\,\vec{x} = \vec{y}$: Aufwand für grosse Werte von n

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^2$$

Ist n gross, so ist offensichtlich $n^3 \gg n^2$ und nur der Aufwand für die Zerlegung ist erheblich. Müssen mehrere Gleichungssysteme mit der selben Matrix A aber verschiedenen Vektoren $\vec{b}$ gelöst werden, so muss die Zerlegung $A = L\,U$ nur einmal bestimmt werden. Der Aufwand pro zusätzlich zu lösendes Gleichungssystem ist in etwa n^2. Terme der Ordnung n^2 können für $n \gg 1$ vernachlässigt werden und man erhält:

> Um ein System von n linearen Gleichungen mit Hilfe der LU–Zerlegung zu lösen benötigt man ca. $\frac{1}{3}\,n^3$ Operationen.

Berechnen der inversen Matrix

Will man die inverse Matrix bestimmen, so kann auch das Schema der LU–Zerlegung verwendet werden. Das Schema muss aber mit der um eine Einheitsmatrix erweiterten Matrix ausgeführt werden.

1. Berechnen der Zerlegung $A = L\,U$.

   - Um mit Hilfe der ersten Zeile in der ersten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-1)^2$ und $n-1$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen zweiten Zeile in der zweiten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-2)^2$ und $2\,(n-2)$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen dritten Zeile in der dritten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-3)^2$ und $3\,(n-3)$ Operationen ausgeführt werden.
   - Die obigen Schritte werden bis zur letzten Zeile durchgeführt.

   Als Rechenaufwand für die erste Phase des Invertierens einer $n \times n$–Matrizen A erhalten wir für grosse Werte von n

$$\sum_{k=1}^{n}((n-k)^2 + k\,(n-k)) = \sum_{k=1}^{n} n\,(n-k) = \frac{n^2\,(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^3$$

2. Beim Rückwärtseinsetzen arbeiten wir von unten nach oben.

   - Um alle Zahlen ganz rechts zu Null zu setzen braucht es $(n-1)\,(n+1)$ Operationen.

- Um alle Zahlen in der zweiten Spalte von rechts rechts zu Null zu setzen braucht es $(n-2)\,(n+1)$ Operationen.
- Um alle Zahlen in der dritten Spalte von rechts rechts zu Null zu setzen braucht es $(n-3)\,(n+1)$ Operationen.
- Der Prozess muss bis zur obersten Zeile fortgesetzt werden.

$$(n+1)\,\sum_{k=1}^{n}(n-k) \approx (n+1)\,\frac{n^2}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^3$$

Insgesamt sind also ca. n^3 Operationen notwendig, um eine $n \times n$–Matrix zu invertieren. Um anschliessend ein Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen, kann der Vektor $\vec{b}$ mit A^{-1} multipliziert werden. Das benötigt ca. n^2 Operationen.

	LU–Zerlegung	A^{-1} bestimmen
Grundaufwand	$\frac{1}{3}\,n^3$	n^3
Zusätzlicher Aufwand um ein System$A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen	n^2	n^2

Tabelle 5.1: Vergleich von LU–Zerlegung und Matrizeninversion

Tabelle 5.1 zeigt, dass die LU–Zerlegung effizienter ist um ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen, als das Berechnen der inversen Matrix A^{-1}.

Computer	Anzahl FLOP pro Sekunde
NeXT (68040/25MHz)	1.0 M
HP 735/100	10.0 M
SUN Sparc ULTRA 10 (440MHz)	50.0 M
Pentium III 800 (zu wenig Cache)	50.0 M
Pentium III 800 (in Cache)	185.0 M
Pentium 4 2.6 GHz (zu wenig Cache)	370.0 M
Pentium 4 2.6 GHz (in Cache)	450.0 M

Tabelle 5.2: Rechenleistung einiger CPU

In Tabelle 5.2 finden Sie eine Zusammenstellung von Rechenleistungen einiger CPU's für Probleme vom Typ "Matrix invertieren". Aufgrund dieser Tabelle kann leicht die Rechenzeit abgeschätzt werden um ein System von n linearen Gleichungen zu lösen. Die Zahlen in Tabelle 5.3 können Ihnen einen Hinweis geben welche Grössenordnung Sytem auf einem gegebenen Rechener gelöst werden kann.

Anzahl Gleichungen	Anzahl Operationen	Rechenzeit für 10 M Flop CPU
n	$\frac{1}{3}\,n^3$	$\frac{1}{3}\,n^3\;10^{-7}$ sec
10	333	0.03 msec
100	$3.33 \cdot 10^5$	3 msec
1000	$3.33 \cdot 10^8$	3 sec
10000	$3.33 \cdot 10^{11}$	50 min

Tabelle 5.3: Rechenzeit um ein lineares System zu lösen

5.1.6 Speicheraufwand und Code in *Matlab*

Um für eine $n \times n$–Matrix A die Zerlegung $A = L \cdot U$ zu speichern ist nur eine $n \times n$–Matrix nötig, da man weiss, dass die obere Hälfte von L und die untere Hälfte von U mit Nullen gefüllt sind. Auf der Diagonalen von U findet man nur Zahlen 1. Diese Information kann bereits während der Rechnung ausgenutzt werden um Speicherplatz zu sparen.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3\backslash 0 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1\backslash 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3\backslash 0 & 7\backslash 1 \end{bmatrix}$$

Die obige Notation muss folgendermassen gelesen werden

$$\begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1\backslash 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3\backslash 0 & 7\backslash 1 \end{bmatrix} \quad \text{entspricht} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Im Verlaufe des Reduktionsprozesses werden also in der zu zerlegenden Matrix A die Einträge modifiziert, so dass zum Schluss alle Information über die LR–Zerlegung in A enthalten ist. Der untenstehende *Matlab*–Code (tatsächlich wurde die *Matlab*–Clone OCTAVE verwendet) führt die Rechnungen aus. Es ist zu beachten, dass alle Rechnungen „innerhalb“ der Matrix A ausgeführt werden.

Octave

```
function res = ludemo(A)
% res  = ludemo(A) if A is a square matrix
% performs the LU decomposition of the matrix A
% !!!!!!!!!!! NO PIVOTING IS DONE !!!!!!!!!!!!!!!!
% this is for instructional purposes only
% the computation are done without creating new matrices
% the matrix A is used to store L and U
% the upper matrix is to be found strictly above the diagonal
% and diagonal elements are 1, you may call
%     U=triu(res,1)+eye(3)
% the lower matrix is to be found on and below the diagonal
% you may call
%     L=tril(res)
%  you should then obtain A = L U

% a test on the dimensions
[n,m] = size(A);
if (n!=m)
  error ("ludemo: matrix has to be square ")
endif

% perform the decomposition
for k=1:n-1
  if ( A(k,k) == 0) error ("ludemo: division by 0") endif
  A(k,k+1:n) = A(k,k+1:n)/A(k,k);
  for j=k+1:n
     A(j,k+1:n) = A(j,k+1:n) - A(k,k+1:n)*A(j,k);
  endfor
endfor

% return the result
```

```
res=A;
endfunction
```

Die untenstehende Help–Seite von Matlab (orginal) zeigt, dass auch bei Berücksichtigung der Permutationen keine gravierenden Änderungen auftreten.

Matlab

```
LU    Factors from Gaussian elimination.
      [L,U] = LU(X) stores a upper triangular matrix in U and a
      "psychologically lower triangular matrix", i.e. a product
      of lower triangular and permutation matrices, in L , so
      that X = L*U.

      [L,U,P] = LU(X) returns lower triangular matrix L, upper
      triangular matrix U, and permutation matrix P so that
      P*X = L*U.

      By itself, LU(X) returns the output from LINPACK'S ZGEFA routine.
```

5.2 Matrix Operationen mit dem HP 48

Dieser Taschenrechner beherrscht alle Grundoperationen mit Vektoren und Matrizen. Für eine Einführung ist das Handbuch zu konsultieren.

5.2.1 Lösen von Gleichungssystemen

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrl} 1\,x_1 & +3\,x_2 & +4\,x_3 = & 7 \\ 2\,x_1 & +0\,x_2 & -1\,x_3 = & -1 \\ -2\,x_1 & +1\,x_2 & +2\,x_3 = & 2 \end{array}$$

kann durch

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Der HP kann dieses System lösen, indem der Vektor $\vec{b}$ als `[7 -1 2]` auf den Stack gelegt wird, dann die Matrix A und anschliessend wird mit der Divisionstaste $\boxed{\div}$ die Lösung $\vec{x}$ bestimmt. Legt man eine Matrix A auf den Stack und drückt dann die Taste `1/x`, so wird die Matrix invertiert. Die inverse Matrix kann mit dem Vektor $\vec{b}$ multipliziert werden mit dem Resultat $\vec{x}$.

5.2.2 Matrix–Zerlegungen

Auf den neueren Modellen der Taschenrechner HP 48 sind einige Befehle für Matrixzerlegungen (**Faktorisierung**) installiert. Ziel dieser Notiz ist es diese zu erläutern und mit Beispielen zu illustrieren. Sie finden diese Befehle via Menues durch `MTH` `MATR` `FACTR`. Um die Übersichtlichkeit etwas zu verbessern wurden alle Resultate gerundet.

LU–Zerlegung

Im Kurs wird die LU–Zerlegung einer Matrix besprochen. Sie entspricht dem Lösen eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Verfahrens von Gauss. Auf dem Taschenrechner erhalten Sie diese Faktorisierung mit Hilfe der Taste `LU`. Die LU–Zerlegung kann nur von einer quadratischen Matrix bestimmt werden.

Mit Hilfe der LU–Zerlegung können auch nicht eindeutig lösbare Gleichungssysteme untersucht werden.

5–10 Beispiel : Als Beispiel untersuchen wir die Matrix A mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Legt man diese Matrix auf den Stack und wendet den Befehl $\boxed{\texttt{LU}}$ an, so erhalten Sie drei Matrizen als Resultat zurück:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1.14286 & 1.2857 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0.85714 & 0 \\ 4 & 0.42857 & 0 \end{bmatrix}$$

Es gilt

$$P \cdot A = L \cdot U \quad \text{oder} \quad A = P^{-1} \cdot L \cdot U$$

In den Matrizen L und U stecken die Zeilenoperation des Verfahrens von Gauss und in P die eventuell notwendigen Zeilenvertauschungen. Da bei der Matrix L unten rechts eine 0 steht ist $\det A = 0$ und ein Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{b}$ nicht eindeutig lösbar. Man untersucht stattdessen die zwei einfach lösbaren Systeme

$$\begin{aligned} L\,\vec{y} &= P \cdot \vec{b} \\ U\,\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

Dann ist

$$A\,\vec{x} = P^{-1} \cdot L \cdot U\,\vec{x} = P^{-1} \cdot L\,\vec{y} = P^{-1} \cdot P\,\vec{b} = \vec{b}$$

Als Beispiel untersuchen wir den Vektor $\vec{b} = (1,2,4)^T$. Es ist

$$P\,\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit wird aus der Gleichung $L\,\vec{y} = P\,\vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0.85714 & 0 \\ 4 & 0.42857 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dieses System versucht man von oben nach unten zu lösen und erhält sofort

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{4}{7} \\ y_2 &= \frac{1}{0.85714}\,(1 - y_1) = \frac{1}{0.85714}\,\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Aber die dritte Gleichung lautet

$$4\,y_1 + 0.42857\,y_2 = 2$$

Diese Gleichung ist falsch (y_1 und y_2 sind bereits bekannt). Die Gleichung wäre dann gelöst, wenn in der zweiten Komponente des Vektors $\vec{b}$ statt der 2 die „richtige“ Zahl stehen würde. Man kann also mit Hilfe der Matrizen P und L herausfinden für welche speziellen Vektoren das System $A\,\vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung hat, obwohl $\det A = 0$. Man kann auch ablesen, wie diese Lösungen aussehen. ♢

LQ–Zerlegung

Hier wird eine $m \times n$–Matrix A dargestellt durch

$$P \cdot A = L \cdot Q$$

Hierbei ist P eine $m \times m$–Permutationsmatrix, L eine $m \times n$ untere Dreiecksmatrix und Q eine orthogonale $n \times n$–Matrix. Lösungen von $A\,\vec{x} = \vec{b}$ werden anschliessend durch Studium von

$$\begin{aligned} L\,\vec{y} &= P \cdot \vec{b} \\ Q\,\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

untersucht. Da die Matrix Q orthogonal ist, ist das System $Q\,\vec{x} = \vec{y}$ für beliebige Vektoren $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. Eine wesentliche Eigenschaft von orthogonalen Matrizen ist $Q^T = Q^{-1}$ und somit kann $Q\,\vec{x} = \vec{y}$ leicht durch $\vec{x} = Q^T\,\vec{y}$ gelöst werden. Das wesentliche Verhalten von Lösungen von $A\,\vec{x} = \vec{b}$ wird bestimmt durch das erste Gleichungssystem.

Mit Hilfe der LQ–Zerlegung können auch über- und unterbestimmte Gleichungssyteme untersucht werden.

5–11 Beispiel : Wir untersuchen die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix entspricht einem System von zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten und man kann deshalb keine eindeutige Lösung erwarten. Hilfe von $\boxed{\texttt{LQ}}$ erhält man

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} -0.218 & 0.436 & 0.873 \\ -0.946 & -0.315 & -0.079 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{bmatrix} 4.583 & 0 & 0 \\ 3.273 & -1.813 & 0 \end{bmatrix}$$

es gilt $P \cdot A = L \cdot Q$, d.h.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.583 & 0 & 0 \\ 3.273 & -1.813 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.218 & 0.436 & 0.873 \\ -0.946 & -0.315 & -0.079 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix}$$

und statt des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

untersucht man

$$\begin{bmatrix} 4.583 & 0 & 0 \\ 3.273 & -1.813 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} -0.218 & 0.436 & 0.873 \\ -0.946 & -0.315 & -0.079 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das erste Gleichungssystem für y_1, y_2 und y_3 lautet

$$\begin{aligned} 4.583\,y_1 \quad & +0\,y_2 & +0\,y_3 &= b_2 \\ 3.273\,y_1 \quad & -1.813\,y_2 & +0\,y_3 &= b_1 \end{aligned}$$

Somit sind y_1 und y_2 eindeutig bestimmt, die dritte Variable y_3 aber bleibt frei wählbar. Mit Hilfe von

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.218 & -0.946 & 0.241 \\ 0.436 & -0.315 & -0.843 \\ 0.873 & -0.079 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

sind nun alle Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems beschrieben. ♢

5–12 Beispiel : Der Nullraum der Matrix A ist gegeben durch die Lösungen des Gleichungssystems

$$A\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

Mit Hilfe der LQ–Zerlegung kommt man auf die zwei Gleichungssysteme $L\,\vec{y} = \vec{0}$ und $Q\,\vec{x} = \vec{y}$. Die Zerlegung des vorangehenden Beispiels führt also auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrr} 4.583\,y_1 & +0\,y_2 & +0\,y_3 = 0 \\ 3.273\,y_1 & -1.813\,y_2 & +0\,y_3 = 0 \end{array}$$

Die Lösungen sind Vielfache der Vektors $\vec{y}_h = (0,0,1)^T$. Alls Lösungen des Systems $A\,\vec{x} = \vec{0}$ sind somit Vielfache des Vektors

$$\vec{x}_h = Q^T\,\vec{y}_h = \begin{bmatrix} -0.218 & -0.946 & 0.241 \\ 0.436 & -0.315 & -0.843 \\ 0.873 & -0.079 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.241 \\ -0.843 \\ 0.482 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{x}_h$ bildet eine Basis von $\ker A$. ♢

5–13 Beispiel : Für die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0.2 & 1.4 \\ -2.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Statt der drei Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

für die zwei Unbekannten x_1 und x_2 untersucht man nun

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0.2 & 1.4 \\ -2.8 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Der wesentliche Unterschied ist die Zahl 0 oben rechts in der Matrix L und die Permutation der Komponenten von $\vec{b}$. Aus den ersten beiden Gleichungen $-5\,y_1 = b_3$ und $0.2\,y_1 + 1.4\,y_2 = b_1$ können y_1 und y_2 berechnet werden. Nun gibt es genau einen zugelassenen Wert für b_2 so dass die dritte Gleichung $-2.8\,y_2 + 0.4\,y_2 = b_2$ gelöst wird. Dieses Verhalten sollte keine Überraschung sein für ein überbestimmtes Gleichungssystem. ♢

QR–Zerlegung

Hier wird eine $m \times n$–Matrix A dargestellt durch

$$A \cdot P = Q \cdot R$$

Hierbei ist P eine $n \times n$–Permutationsmatrix, R eine $m \times n$ obere Dreiecksmatrix und Q eine orthogonale $m \times m$–Matrix. Lösungen von $A\,\vec{x} = \vec{b}$ werden anschliessend durch Studium von $\vec{x} = P\,\vec{z}$ und $A\,P\,\vec{z} = Q \cdot R\,\vec{z} = \vec{b}$ ersetzt. Diese System wird gelöst durch

$$\begin{aligned} Q\,\vec{y} &= \vec{b} \\ R\,\vec{z} &= \vec{y} \end{aligned}$$

untersucht. Da die Matrix Q orthogonal ist, ist $\vec{y}$ ergeben durch $\vec{y} = Q^T\,\vec{b}$. Da R eine Rechtsmatrix ist kann das zweite Gleichungssystem von unten nach oben aufgelöst werden. Von der Lösung $\vec{z}$ kommt man durch Permutationen zu $\vec{x} = P\,\vec{z}$ zum Lösungsvektor.

Auch mit Hilfe der QR–Zerlegung können über- und unterbestimmte Gleichungssyteme untersucht werden.

5–14 Beispiel : Für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir mittels `QR`

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{bmatrix} -5 & 0.2 & -2.8 \\ 0 & 1.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Statt der zwei Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

für die drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3 berechnet man zuerst

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

und untersucht dann die beiden Gleichungen

$$\begin{bmatrix} -5 & 0.2 & -2.8 \\ 0 & 1.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

In diesem System ist z_3 frei wählbar. z_1 und z_2 können als Funktion von z_3 angegeben werden. Wegen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

können wir x_2 frei wählen und dann x_3 und x_1 als Funktion x_2 angeben.

Für $\vec{b} = (1\,,\,2)^T$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und aus

$$\begin{bmatrix} -5 & 0.2 & -2.8 \\ 0 & 1.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} -5\,z_1 &= 1 - 0.2\,z_2 - 2.8\,z_3 \\ 1.4\,z_2 &= -2 + 0.4\,z_3 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{5}\,(1 - 0.2\,x_1 - 2.8\,x_2) \\ x_1 &= \frac{1}{1.4}\,(-2 + 0.4\,x_2) \end{aligned}$$

♢

Singulärwert–Zerlegung

Hier wird eine $m \times n$–Matrix A dargestellt durch

$$A = U \cdot D \cdot V$$

Hierbei ist U eine orthogonale $m \times m$–Matrix, V eine orthogonale $n \times n$–Matrix und D eine $m \times n$–Matrix die nur in der Diagonale von 0 verschiedene Zahlen enthält.

5–15 Beispiel : Für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir mittels `SVD`

$$D = \begin{bmatrix} 5.736 & 0 & 0 \\ 0 & 1.448 & 0 \end{bmatrix}$$

Da nur in der Diagonalen Zahlen auftreten wird nur der Vektor mit den Diagonalelementen als Resultat ausgegeben. Ist man nur an diesen Werten interessiert, so kann der Befehl `SVL` verwendet werden. Die Matrizen U und V werden dann nicht bestimmt. Mit `SVD` erhält man auch noch

$$U = \begin{bmatrix} 0.621 & -0.7833 \\ 0.7833 & 0.621 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{bmatrix} 0.028 & 0.490 & 0.871 \\ -0.970 & -0.223 & 9.418 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix}$$

Somit gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.621 & -0.7833 \\ 0.7833 & 0.621 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5.736 & 0 & 0 \\ 0 & 1.448 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.028 & 0.490 & 0.871 \\ -0.970 & -0.223 & 9.418 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix}$$

♢

5.2.3 Weitere Matrizen–Befehle

Determinante

Die Determinante einer quadratischen Matrix kann durch den Befehl `det` bestimmt werden.

Rang einer Matrix

Der Rang[1] einer Matrix ist die Anzahl der linear unabhängigen Spalten (oder Zeilen). Diese ganze Zahl kann mit dem Befehl `RANK` bestimmt werden. Der Rang der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ist 2. Der Rang der erweiterten Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

[1]Die Dokumentation zu diesem Befehl im „Benutzerhandbuch, Serie HP 48 G, 1. Ausgabe“ ist falsch. Der Fehler ist teilweise auf eine (falsche) Übersetzung des Wortes „Eigenvalue“ zu „Einzelwert“ zurückzuführen. Zudem ist für nichtquadratische Matrizen die Berechnung via Eigenwerte nicht anwendbar.

ist 3. So sieht man, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z &= 1 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung hat.

Spaltennorm

Um die Spalten–Maximum–Norm einer Matrix zu bestimmen, muss für jede Spalte die Summe der Beträge gebildet werden. Der maximale Wert dieser Spaltensummen liefert die Norm. `CNRM` steht für „Column–NoRM". Für die obige Matrix A ist die Spaltennorm 18.

Zeilennorm

Diese Rechnung ist analog zur obigen Spaltennorm, aber es wird mit Zeilen gerechnet. `RNRM` steht für „Row–NoRM". Für die obige Matrix A ist die Zeilennorm 24.

Konditionierungszahl

Für eine quadratische Matrix A ist die Konditionierungszahl gegeben durch das Produkt der Spaltennorm von A und der Spaltennorm der inversen Matrix A^{-1}. Die Konditionierungszahl gibt an wieviele Stellen Genauigkeit beim Lösen eines Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{b}$ verloren gehen können. Sind vom Vektor $\vec{b}$ n Stellen bekannt, so kann man sich bei $\vec{x}$ auf $n - \log(\mathrm{cond}\,A)$ Stellen verlassen. `COND` steht für „CONDition number".

Eigenwerte, Eigenvektoren

Im Menue `MTH` `MATR` befinden sich die beiden Befehle `EGVL` (EiGenVaLue) und `EGV` (EiGenVector) um Eigenwerte und Eigenvektoren von quadratischen Matrizen zu bestimmen. Als Beispiel känn die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

untersucht werden. Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 \approx 16.12 \quad , \quad \lambda_2 \approx -1.117 \quad \text{und} \quad \lambda_0 = 0$$

Die Eigenvektoren erhält man als Spalten des HP–Resultates. Sie sind in diesem Beispiel

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.283 \\ 0.642 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.110 \\ -0.779 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Wie die untenstehende Rechnung mit *Matlab* zeigt, sind die Eigenvektoren nicht eindeutig bestimmt. Sie können mit beliebigen Faktoren gestreckt werden.

Matlab

```
[v,d]=eig([1 2 3; 4 5 6;7 8 9])
.
v =

    0.231971    0.785830    0.408248
    0.525322    0.086751   -0.816497
    0.818673   -0.612328    0.408248

d =
```

```
16.11684     0.00000     0.00000
 0.00000    -1.11684     0.00000
 0.00000     0.00000    -0.00000
```

Nullraum einer Matrix

Der Nullraum (Kern) einer Matrix A entspricht den Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A\,\vec{x} = \vec{0}$. Für quadratische Matrizen bilden die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 eine Basis des Kerns. Für nichtquadratische Matrizen A lässt sich $\ker A$ mit Hilfe der LQ–Zerlegung bestimmen (siehe Beispiel auf Seite 145).

5.3 Aufgaben

5.3.1 LU–Zerlegung und Elementaroperationen

• **Aufgabe 5–1:**
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

als Produkt von drei Elementarmatrizen geschrieben werden kann in der Form

$$A = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$$

Bestimmen Sie anschliessend A^{-1} mit Hilfe der Inversen der Elementarmatrizen und Matrizenmultiplikationen.

• **Aufgabe 5–2:**
Zeigen Sie, dass die Permutationsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

als Produkt von elementaren Permutationsmatrizen geschrieben werden kann. Bestimmen Sie anschliessend P^{-1}.

• **Aufgabe 5–3:**
In den untenstehenden Matrizen sind alle Werte $k_i \neq 0$. Bestimmen Sie die inversen Matrizen dieser Matrizen.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

• **Aufgabe 5–4:**

Bestimmen Sie die inverse Matrix der folgenden Matrix mit Hilfe von Zeilenoperationen. Alle Zwischenrechnungen sind zu zeigen.

Trouver la matrice inverse de la matrice ci–dessous. Montrer tous les calculs intermédiaires.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

• **Aufgabe 5–5:**

Soit donné le système d'équations pour x, y et z.

Gegeben ist das Gleichungssystem für x, y und z.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ r\,x - y - z &= 1 \\ 2\,x + y - 4\,z &= -3\,q \end{aligned}$$

(a) Pour $z = 3$ et $q = 1$ il existe une solution. Calculer x, y et r.

(b) Soit $q = 2$. Decider pour quel valeur de r il y a infiniment de solutions et trouver ces solutions.

(a) Für $z = 3$ und $q = 1$ gibt es eine Lösung. Berechnen Sie x, y und r.

(b) Sei $q = 2$. Für welche Werte von r gibt es unendlich viele Lösungen? Finden Sie diese.

• **Aufgabe 5–6:**

Die LU–Zerlegung einer Matrix **A** liefert

La décomposition LU d'une matrice **A** rend

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$

(b) Bestimmen Sie $\ker \mathbf{A}$

(c) Finden Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

(a) Calculer $\det(\mathbf{A})$

(b) Déterminer $\ker \mathbf{A}$

(c) Trouver la solution généralle du système des équations linéaires

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 22 \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 5–7:**

Eines der möglichen vier Produkte $\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{R}_j$ ist die LU–Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$.

Un des quatres produits possible $\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{R}_j$ correspond à la factorisation LU de la matrice $\mathbf{A}$

(a) Bestimmen Sie alle Einträge von $\mathbf{A}$.

(b) Berechnen Sie den Lösungsvektor $\vec{x}$.

(a) Trouver tous les nombres en $\mathbf{A}$.

(b) Trouver le vecteur de solution $\vec{x}$.

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 5–8:

Für ein Matrix

Pour une matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gilt

on a

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie A **exakt**.

(b) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf für die vier Koeffizienten der Matrix A.

(a) Trouver A d'une façon **exacte**.

(b) Chercher un système des équations linéaires pour les quatres coefficients de la matrice A.

• Aufgabe 5–9:

Untersuchen Sie die beiden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie

$$A \cdot B \quad \text{und} \quad B \cdot A$$

(b) Wir verlangen $A \cdot B = B \cdot A$. Stellen Sie ein System von 4 Gleichungen auf für die Unbekannten a, b, c und d. Stellen Sie dieses System mit Hilfe einer 4×4–Matrix dar.

(c) Bringen Sie diese Matrix auf Treppengestalt.

• Aufgabe 5–10:

On sait que le système ci–dessous a au moins une solution.

Man weiss, dass das untenstehende System mindestens eine Lösung hat.

$$A\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ q \end{pmatrix} = \vec{b}$$

(a) Trouver la valeur de q.

(b) Donner tous les solutions du système homongène.

(c) Donner tous les solutions du système inhomongène.

(a) Bestimmen Sie den Wert von q.

(b) Finden Sie alle Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

(c) Finden Sie alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems.

• Aufgabe 5–11:

Soit

Sei

$$A\,(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Il existe une valeur de α, tel que la matrice $A(\alpha)$ n'est pas inversible. trouver cette valeur.

(b) Avec la valeur de α trouver ci–dessus, trouver tous les solutions de l'équation lineaire $A(\alpha)\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Trouver toutes les solutiones du système suivant, d'une façon exacte.

(a) Es gibt einen Wert von α, sodass die Matrix $A(\alpha)$ nicht invertierbar ist. Finden Sie diesen Wert.

(b) Für den oben gefundenen Wert von α sind alle Lösungen der linearen Gleichung $A(\alpha)\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen.

(c) Finden Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems. Die Lösungen müssen exakt sein.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 5–12:

Untersuchen Sie die Matrix

Examiner la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(a) Finden Sie eine LU-Zerlegung von A, wobei in der Diagonalen von U nur die Zahlen 1 zu finden sind.

(b) Finden Sie eine LU-Zerlegung von A, wobei in der Diagonalen von L nur die Zahlen 1 zu finden sind.

Diese Aufgabe zeigt, dass es verschidenen Formen von LU-Zerlegungen gibt, die aber alle dem selben Zweck dienen.

(a) Trouver une décomposition LU de A, tel-que dans la diagonal de U on ne trouve que la nombre 1.

(b) Trouver une décomposition LU de A, tel-que dans la diagonal de L on ne trouve que la nombre 1.

Ce problème montre qu'il y a des décompositions differentes. Mais le but des calculations ne change pas.

• Aufgabe 5–13:

Untersuchen Sie das Gleichungssystem

Examiner le système des éqations

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2\,x_2 & +3\,x_3 & +4\,x_4 & = & -2 \\ -x_1 & +2\,x_2 & & +3\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Der Befehl **LU**, angewandt auf die Matrix

La commande **LU**, appliquée sur la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt

rend

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystem mit Hilfe der Matrizen L und U. Die Rechnungen sind ohne Taschenrechner auszuführen.

Trouver toutes les solutions de ce système à l'aide des matrices L et U. Travailler sans calculatrice.

• Aufgabe 5–14:

Un système de n équations linéaires est représenté par les matrices augmentée ci–dessous. Compter la nombres des multiplications nécessaire pour résoudre le système, veut dire transformer dans la forme à droite. Une division correspond à une multiplication. N'echanger pas des lignes. Monter vos explications.

Ein System von n linearen Gleichungen ist dargestellt durch die untenstehenden, erweiterten Matrizen. Bestimmen Sie die Anzahl der notwendigen Multiplikationen um die Systeme zu lösen, d.h. in die rechtstehende Form transformieren. Verwenden Sie keine Zeilenvertauschungen. Eine Division zählt als Multiplikation. Zeigen Sie ihre Erklärungen.

(a) 4 Gleichungen/équations

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right]$$

(b) n Gleichungen/équations

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 4 & -1 & & & & & 1 \\ -2 & 4 & -1 & & & & 2 \\ & -2 & 4 & -1 & & & 3 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -2 & 4 & -1 & n-1 \\ & & & & -2 & 4 & n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & a_1 \\ & 1 & & & & & a_2 \\ & & 1 & & & & a_3 \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & & a_{n-1} \\ & & & & & 1 & a_n \end{array}\right]$$

5.3.2 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 5–1 :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es gilt} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es gilt} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es gilt} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somit ist

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$$

Wegen

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (E_3 \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1} \\ &= E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5–2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = P$$

Lösung zu Aufgabe 5–3 :

(a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$$

(b)

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & \frac{-1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{-1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & \frac{-1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–4 : Rechnen mit Hilfe einer erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_1 + Z_2 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 - Z_1 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 + 2\,Z_2 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_2 - 5\,Z_3 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_1 - 4\,Z_3 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_1 - Z_2 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Somit gilt

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -9 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–5 :

(a) Pour $z = 3$ et $q = 1$

$$\begin{aligned} x - y + 3 &= 3 \\ r\,x - y - 3 &= 1 \\ 2\,x + y - 12 &= -3 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ r\,x - y &= 4 \\ 2\,x + y &= 9 \end{aligned}$$

Addition de la première ligne à la troisième, et soustraction de la deuxiḿe on arrive à

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ (r-1)\,x &= 4 \\ 3\,x &= 9 \end{aligned}$$

Donc $x = 3$ et $r - 1 = \frac{4}{3}$, $r = \frac{7}{3}$ et $y = x = 3$.

(b) Matrice augmente et transformation dans la forme d'une échelle. Mettre $q = 2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ r & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \quad Z_2 - r\,Z_1 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & r-1 & -1-r & 1-3\,r \\ 2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \quad Z_3 - 2\,Z_1 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & r-1 & -1-r & 1-3\,r \\ 0 & 3 & -6 & -12 \end{array}\right] \quad Z_2 \leftrightarrow Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & r-1 & -1-r & 1-3\,r \end{array}\right] \quad Z_3 - \frac{Z_2\,(r-1)}{3} \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -3+r & -3+r \end{array}\right]$$

Pour $r = 3$ on arrive donc à

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

et le système a infiniment de solutions, donné par

$$z = t \quad , \quad y = -4 + 2\,z = -4 + 2\,t \quad \text{et} \quad x = 3 + y - z = 3 - 4 + 2\,t - t = -1 + t$$

Reécrit comme paramétrisation d'une droite

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–6 : Man kann direkt mit der LU–Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ arbeiten. Es ist nicht notwendig (und führt zu Mehrarbeit) die Matrix $\mathbf{A}$ zu bestimmen.

(a) Determinantenmultiplikationssatz

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) = \det(\mathbf{L}) \cdot \det(\mathbf{U}) = -12 \cdot 0 = 0$$

(b) $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{0}$ genau dann wenn $\mathbf{L}\,\vec{r} = \vec{0}$ und $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{r}$

$$\mathbf{L}\,\vec{r} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{r} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} y & = & 2\,z \\ x & = & -2\,y - 3\,z = -7\,z \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Eine partikuläre Lösung ist zu bestimmen. Löse zuerst $\mathbf{L}\,\vec{r} = \vec{b}$ mit Hilfe der erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 0 & -18 \\ 1 & -2 & -2 & 22 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & -2 & -2 & 16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Somit ist $(r, s, t)^T = (6\,,\,-8\,,\,0)^T$ die einzige Lösung. Nun ist $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{r}$ zu lösen. Man erhält

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hier ist z frei wählbar. Mit $z = 0$ erhält man $y = -8$ und $x = 6 - 2\,y - 3\,z = 22$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 22 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad z \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 5–7 :

(a) Nur eine der vier möglichen Matrizenmutilpikationen liefert die Zahl 4 an der richtigen Stelle. Folgliuch gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor $\vec{x}$ ist als Lösung eines linearen Gleichugssystems gegeben. Er kann durch verschiedene Rechnungen bestimmt werden:

- $$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Wegen $\mathbf{A} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{R_2}$ kann zuerst $\mathbf{L}_1\, \vec{y} = \vec{b}$ und anschliessend $\mathbf{R}_2\, \vec{x} = \vec{y}$ gelost werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 2\, y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\, x_2 - 3\, x_3 \\ -3 + 2\, x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von *Matlab* oder *Octave* die folgenden Zeilen bestätigen das Resultat.

Octave

```
L1=[1 0 0;2 1 0;0 0 2]
R1=[2 2 2; 0 2 -2;0 0 2]
L2=[2 0 0;-2 1 0;0 0 1]
R2=[1 2 3; 0 1 -2;0 0 1]

A=L1*R2

b=A\[1;-1;2]
```

Lösung zu Aufgabe 5–8 :

(a)

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -5\, e - 3\, \pi & 2\, e + \pi \\ -19 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) Einer der möglichen Lösungswege ist

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + 3\, b & -2\, a - 5\, b \\ c + 3\, d & -2\, c - 5\, d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dies kann auch geschrieben werden als

$$\begin{array}{rrrrcl} a & +3\,b & & & = & e \\ -2\,a & -5\,b & & & = & \pi \\ & & c & +3\,d & = & 2 \\ & & -2\,c & -5\,d & = & 3 \end{array}$$

Dies ist ein lineraes Gleichungssystem für die vier Unbekannten a, b, c und d.

Lösung zu Aufgabe 5–9 :

(a)

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} a-b & 4\,a+b \\ c-d & 4\,c+d \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} a+4\,c & b+4\,d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} a-b & = & a+4\,c \\ 4\,a+b & = & b+4\,d \\ c-d & = & -a+c \\ 4\,c+d & = & -b+d \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{rrrrl} & -b & -4\,c & & = 0 \\ 4\,a & & & -4\,d & = 0 \\ +a & & & -d & = 0 \\ & +b & +4\,c & & = 0 \end{array}$$

Das führt auf die Matrizennotation

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Somit können die Werte von c und d frei gewählt werden und man kann daraus a und b bestimmen.

$$a = d \quad \text{und} \quad b = -4\,c$$

Dieses homogene System von vier linearen Gleichungen hat somit unendlich viele Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 5–10 : Erweiterte Matrix auf Treppengestalt bringen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & -1 & -7 & q \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & q-15 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-12 \end{array}\right]$$

Somit ist das ursprüngliche System äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ q-12 \end{pmatrix}$$

(a) Damit das System lösbar ist muss $q = 12$ sein.

(b) $x_2 = t$ und $x_4 = s$ sind frei wählbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4 = -s \\ x_1 &= -3\,x_2 + 2\,x_4 = -3\,t + 2\,s \end{aligned}$$

und somit

$$\vec{x}_h = t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) eine partikuläre Lösung kann mit Hilfe der speziellen Wahl $x_2 = x_4 = 0$ bestimmt werden als

$$x_3 = 3 \quad \text{und} \quad x_1 = 5$$

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle [LandHest92, p 364]

Lösung zu Aufgabe 5–11 :

(a) Bei der Reduktion auf Treppengestalt ergeben sich die fogenden erweiterten Matrizen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1-\frac{\alpha}{2} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\alpha}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Die Matrix ist nicht invertierbar, falls in der letzten Zeile alle Eintäge 0 sind. Das führt auf die Bedingung $\alpha = 4$.

(b) Das System

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist zu lösen. Die dritte Zeile ist eine Linearkombination der ersten beiden. Deshalb können wir nur die ersten beiden Gleichungen untersuchen und kommen somit auf

$$\begin{aligned} 2\,x \quad +0\,y &= -4\,z \\ 1\,x \quad -2\,y &= 0\,z \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = -2z$ und aus der zweiten $y = \frac{1}{2}\,x = -z$. Somit ist der Lösungsraum gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2\,z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{wobei} \quad z \in \mathbb{R}$$

(c) Von oben nach unten auflösen führt auf

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–12 : Die beiden Resultate wurden ohne Permutationen erzeugt.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & 9.9 & 0 \\ 5 & -0.5 & 8.98990 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 1 & -0.02020 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.050505 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 0 & 9.9 & -0.2 \\ 0 & 0 & 8.98990 \end{bmatrix}$$

Taschenrechner erzeugen in der Regel nur eines der beiden Resultate. Wegen

$$A^T = (L \cdot R)^T = R^T \cdot L^T = L_1 \cdot R_1$$

erhalten Sie aus der LU–Zerlegung der Transponierten A^T das andere Resultat.

Lösung zu Aufgabe 5–13 : Zuerst $L\vec{y} = \vec{b}$ lösen, dann $U\vec{x} = \vec{y}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Von oben nach unten auflösen

$$\begin{aligned} y_1 &= -2 \\ y_2 &= -1 + y_1 = -3 \\ y_3 &= 0 - y_1 + \frac{1}{4}\, y_2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Nun kann das System $U\vec{x} = \vec{y}$ untersucht werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

x_4 kann frei gewählt werden. Setzt man $x_4 = 0$ so kann das System von unten nach oben aufgelöst werden mit dem Resultat

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 \\ x_2 &= \frac{1}{4}\,(-3 - 3\,x_3) = 0 \\ x_1 &= -2 - 2\,x_2 - 3\,x_3 = 1 \end{aligned}$$

Somit haben wir eine partikuläre Lösung

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen setzt man $x_4 = t$ und löst von unten nach oben auf.

$$\begin{aligned} x_3 &= -t \\ x_2 &= \frac{1}{4}\,(-7\,t - 3\,x_3) = -t \\ x_1 &= -4\,t - 2\,x_2 - 3\,x_3 = t \end{aligned}$$

und somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–14 :

(a) Zu zählen sind Multiplikationen (Multiplikation=Division)

1. Von oben nach unten 1 entlang der Diagonalen, Nullen darunter erzeugen. Operationen pro Zeile
   - 2 Divisionen um 1 entlang der Diagonalen zu erzeugen
   - 2 Multiplikation+Addition um die Zahl in der Zeile darunter zu erzeugen und den erweiterten Teil der Matrix zu behandeln. Für die letzte Zeile ist nur eine Division notwendig.
   - Total: $(4-1)\,(2+2)+1 = 13$ Multiplikationen

   Das Zwischenresultat ist eine Matrix mit 0 unterhalb der Diagonalen, 1 entlang der Diagonalen und Zahlen in der ersten, oberen Nebendiagonalen.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & c_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & c_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{array}\right]$$

2. Von unten nach oben Nullen oberhalb der Diagonalen erzeugen. Operationen pro Zeile
   - 1 Multiplikation+Addition um die Zahl in der Zeile oberhalb der Diagonalen zu Null setzen. Die Operation muss nur im erweiterten Teil effektiv ausgeführt werden.
   - Die unterste Zeile muss nicht bearbeitet werden
   - Total: 3 Multiplikationen

Insgesamt 16 Multiplikationen

(b) Zu zählen sind Multiplikationen

1. Von oben nach unten 1 entlang der Diagonalen, Nullen darunter erzeugen.
   Total: $(n-1)\,(2+2)+1 = 4\,n-3$ Multiplikationen
2. Von unten nach oben Nullen oberhalb der Diagonalen erzeugen.
   Total: $n-1$ Multiplikationen

Insgesamt werden $5\,n-4$ Multiplikationen benötigt.

5.4 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Matrizenoperationen schnell und zuverlässig ausführen können.
- Elementarmatrizen erkennen und mit ihnen rechnen können.
- Gleichungssysteme mit Dreiecksmatrizen schnell und zuverlässig (von Hand) lösen können.
- die engen Beziehungen zwischen Elementarmatrizen, LU–Zerlegung und dem Verfahren von Gauss kennen.
- die inversen Matrizen von 3×3 und 4×4–Matrizen auch von Hand ausführen können.
- alle obigen Rechnungen schnell und zuverlässig mit Ihrem Taschenrechner ausführen können.
- auch spezielle Gleichungssysteme mit dem Taschenrechner lösen können: Stichwort Faktorisierungen.

Chapitre 6

Vecteurs

6.1 Introduction

Dans les sciences et techniques des *scalaires* et des *vecteurs* sont souvent importants. Une scalaire est donnée par un nombre. On a des exemples physique: masse, température, rapidité, épaisseur d'une mure ou pression d'air. Pour que un vecteur est déterminé if faut no seulement savoir sa longueur mais aussi sa direction. Des exemples typiques sont: force, vitesse ou un champs électrique. Les vecteurs sont souvent utilisés pour des structures mathématiques: CAD, infographie, résoudre des systèmes des équations linéaires, statique, équations différentielles. En chapitre 3 on a contruit des vecteurs a l'aide des propriétées algébraiques, dans se chapitre on ulilise de la géometrie pour examiner des vecteurs.

Quelques résultats et exemples dans ce chapitre sont base sur le livre [Bach71].

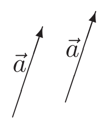
6–1 Définition : Des **vecteurs** sont des objets donnés par une longueur et une direction. Il doit être évident avec quel type de vecteur on travaille, des vecteurs dans un plan, dans espace ou dans une autre structure. Pour indiquer un vecteur dans sa notation on met une petite flèche au–dessus du symbole pour le vecteur.

$$\vec{a}, \quad \vec{A}, \quad \overrightarrow{AB}$$

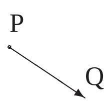
La longueur d'un vecteur $\vec{a}$ est dite **norme** de $\vec{a}$ et est notée par $\|\vec{a}\|$.

6–2 Résultat : *Deux vecteurs sont dites* ***égaux*** *si ils ont les mêmes longueurs et directions.*

Donc deux vecteurs coïncide si une translation parallèle permet de boucher un vecteur sur l'autre.



Graphiquement un représente un vecteur avec une flèche de longueur et direction donné. Observer que deux vecteurs avec des point initiales et finales peuvent bien être identique.



Un vecteur peut être donné par un point initial et un point final. Utiliser la notation $\vec{PQ}$ pour cette vecteur.

Le vecteur **zéro** $\vec{0}$ est un vecteur spécial avec longueur 0. C'est le seul vecteur sans direction.

6–3 Définition : Deux vecteurs sont dites **parallèles** si ils ont des directions égales ou exactement opposées.

Les vecteurs en Figures 6.1 sont parallèles.

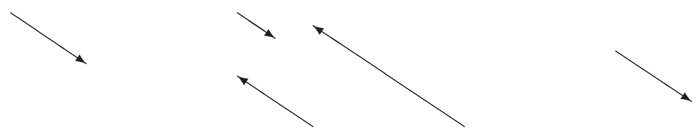


Figure 6.1: vecteurs parallèles

6.2 opérations avec des vecteurs

Le but de cette section est d'expliquer les opérations de base avec des vecteurs.

1. addition des vecteurs
2. soustraction des vecteurs
3. multiplication d'un vecteurs avec un nombre

6.2.1 sddition des vecteurs

6–4 Définition : L'addition de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est caractérisé par la description suivante:

Appliquer une translation parallèlle au vecteur $\vec{b}$ jusque le point final de $\vec{a}$ coïncide avec le point initial du vecteurs $\vec{b}$. Le vecteur $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ a le point initial de $\vec{a}$ comme point initial et le point final coïncide avec le point final de $\vec{b}$.

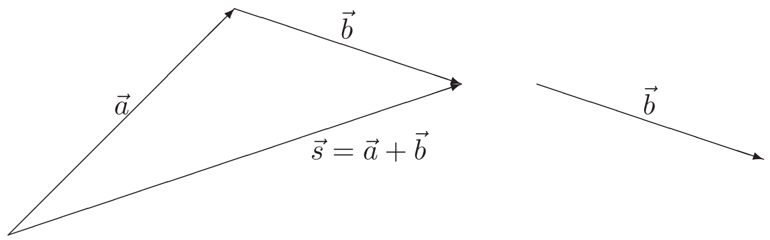


Figure 6.2: somme des vecteurs

6–5 Résultat : *Utiliser des graphiques pour vérifier les règles de calcul suivantes:*

$\vec{a} + \vec{b} \;=\; \vec{b} + \vec{a}$	*loi de commutativité*
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \;=\; \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	*loi d'assoziativité*

6–6 Résultat : ***inégalité du triangle***

A l'aide d'un triangle avec les trois cotés $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{a} + \vec{b}$ on vois que

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

6.2.2 soustraction des vecteurs

Avec un raisonnement géométrique il est évidant que pour chaque vecteur $\vec{a}$ il existe exactement un vecteur $\vec{b}$ tel que $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. Le nouveau vecteur $\vec{b}$ a la même longueur que $\vec{a}$ et la direction est opposée. Ce vecteur est dit **vecteur inverse** et on utilise la notation $-\vec{a}$.

La soustraction des vecteurs et l'opération inverse á l'addition, donc on trouve

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$$

6–7 Définition : La difference des verteurs $\vec{a}-\vec{b}$ est caractérisée par

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

Le vecteur $-\vec{b}$ est le vecteur inverse de $\vec{b}$.

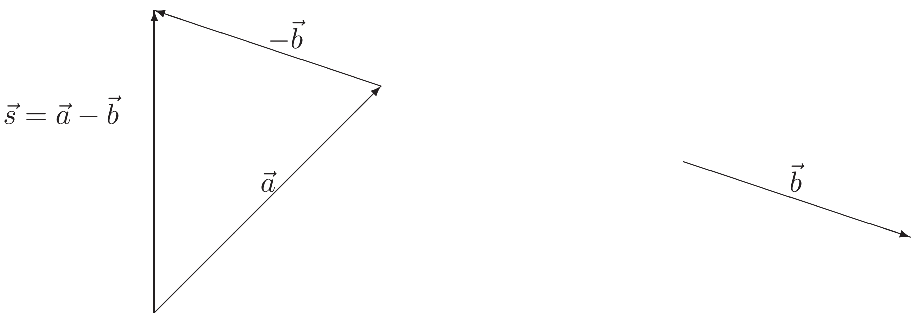


Figure 6.3: difference des vecteurs

6–8 Résultat : *Le vecteur de la somme $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$ et la difference $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ sont visualisées dans un parallélogramme avec $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme cotés, voir Figure 6.2.2.*

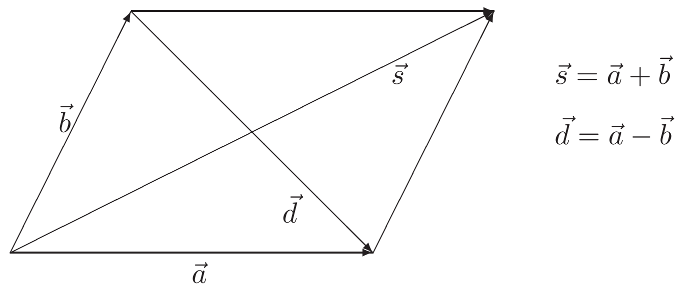


Figure 6.4: parallélogramme des vecteurs

6.2.3 multiplication d'un vecteurs avec un nombre

6–9 Définition : En multiplicatient d'un vecteurs $\vec{a}$ avec un nombre réel $\lambda\in\mathbb{R}$ on arrive á un vecteurs $\vec{b}=\lambda\,\vec{a}$ avec les propriétés suivantes:

1. la longueur de $\vec{b}$ est donnée par la multiplication de $|\lambda|$ avec la longueur $\|\vec{a}\|$ de $\vec{a}$.

$$\|\vec{b}\|=\|\lambda\,\vec{a}\|=|\lambda|\;\|\vec{a}\|$$

2. si $\lambda > 0$ puis le vecteur $\vec{b}$ a la même direction que $\vec{a}$ et si $\lambda < 0$ la direction de $\vec{b}$ est opposée de la direction de $\vec{a}$.

Utiliser une graphique pour vérifier les résultats et règles de calculs suivantes.

6–10 Théorème : *Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèle si il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda\,\vec{a} = \vec{b}$.*

6–11 Résultat : *Sont $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des vecteurs et $\lambda\ ,\ \gamma \in \mathbb{R}$ des nombres.*

$$\begin{aligned} 2\,\vec{a} &= \vec{a} + \vec{a} \\ (-1)\cdot\vec{a} &= -\vec{a} \\ \lambda\,(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b} \\ (\lambda + \gamma)\,\vec{a} &= \lambda\vec{a} + \gamma\vec{a} \end{aligned}$$

6.2.4 vecteurs et points

Examiner un plan ou l'espace. Un point arbitraire peut être identifié avec un vecteur. Le point P est représenté par le vecteurs de l'origine á ce point. Cette identifications est souvent utilisée et on parle du point P ou du vecteur $\vec{P}$. Une meilleur notation est donnée par $\overrightarrow{OP}$.

6.3 vecteurs dans le plan

Dans cette section nous examinons des vecteurs dans un plan et des application dans le plan.

6.3.1 coordonnées cartésienne

Dans un plan on choisit l'origine 0 et puis on choisit deux directions spéciales $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$. On demande que $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et les deux directions sont orthogonales. Examiner cette situation en Figure 6.5 dans un plan. Le vecteur $\vec{e}_x$ (resp. $\vec{e}_y$) est dit **vecteur d'unité de coordonnée** dans la direction x (resp. direction y).

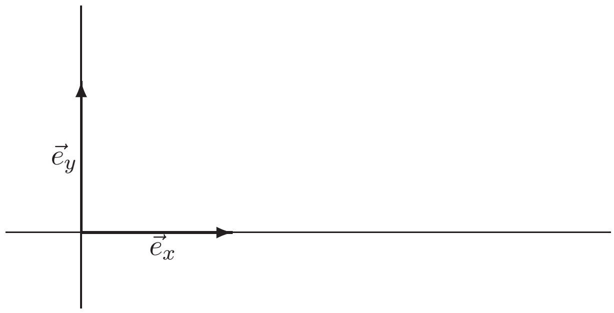


Figure 6.5: plan certesienne avec vecteurs d'unité de coordonnée

Examiner un vecteur „quelconque" $\vec{a}$ dans ce plan. Pour l'exemple en Figure 6.6 trouver

$$\vec{a} = 3\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y \qquad .$$

Si l'identité ci–dessus est correcte on peut construire le vecteur $\vec{a}$ à partir du pair des nombres $(3\,,\,2)$. Donc il existe un lien entre le vecteur $\vec{a}$ et les nombres $(3\,,\,2)$.

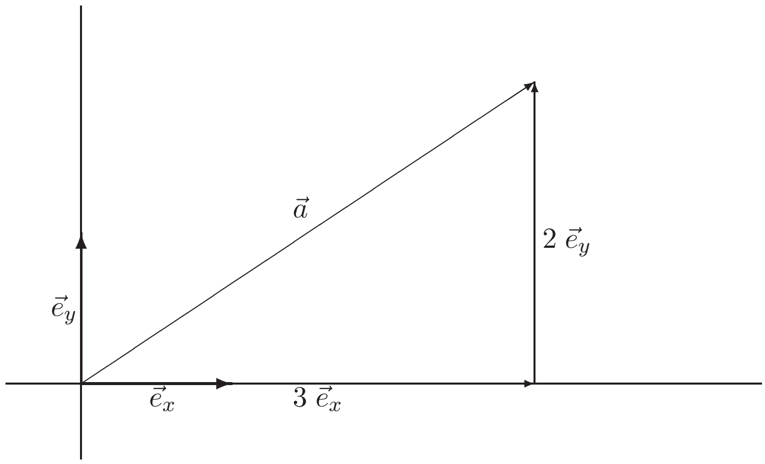


Figure 6.6: représentation cartésienne d'un vecteur

La Figure 6.6 montre que chaque vecteur $\vec{a}$ dans ce plan peut être écrit dans la forme

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y \quad \text{wobei} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Donc les vecteurs dans ce plan sont identifiés par des pairs des nombres réels.

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2}$$

Les nombres a_i sont dites les **coordonnés** du vecteurs $\vec{a}$ et les vecteurs $a_i\,\vec{e}_i$ sont dites les **composantes** du vecteur. Cette représentation est dit **représentation cartésienne**.

Pour les vecteurs d'unité des coordonnés $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ on trouve

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.3.2 opérations avec les représentation cartésienne

Considerer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Examiner les opération de base avec des vecteurs. Il est important de visualiser ces règles de calcul et les interprétations géométrique.

6–12 Résultat :

- *addition*

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

- *multiplication avec un scalaire*

$$\lambda\,\vec{a} = \lambda\, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 \\ \lambda\, a_2 \end{pmatrix}$$

- *longueur d'un vecteur*

$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Utiliser quelques exemples pour vérifier que tout règle de calcul pour les vecteurs de la section précédente reste correcte.

6.3.3 applications

centre de gravité d'un système des points de masse

Examinons un système de n masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ dans le plan. Les positions des points est donnés par des vecteurs $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$. Puis la masse totale M est

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Le centre de gravité S est donné par

$$\vec{r}(S) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

6–13 Exemple : Examiner un hexagone équilatéral avec un cion qui manque. Trouver le centre de gravité. ♢

balance des forces

Examiner un problème simple, mais important en statique: à un point on applique des forces différentes $\vec{F}_i$. Trouver la force totale $\vec{F}_R$.

Des forces sont (comme les vecteurs) déterminés par leur largeur (longueur) et leur direction. L'addition des forces correspond à l'addition des vecteurs. Donc on trouve

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_k$$

6–14 Exemple :

Les forces sont donnés par la table à droite.

Trouver largeur et direction de la force totale $\vec{F}_R$.

	Richtung	Stärke
$\vec{F}_1$	30°	2
$\vec{F}_2$	90°	1
$\vec{F}_3$	$-30°$	-2
$\vec{F}_4$	45°	2.5

♢

6–15 Exemple : Une sculpture de masse 200 kg est suspendue par deux câbles à des angles de $40°$ (droite) et $50°$ (gauche). Déterminer les forces sur les câbles.

Solution:

1. Dessiner une graphique avec les trois forces à tenir compte.
2. Les directions de ces forces sont connues, comme la largeur d'une de ces forces.
3. Donner deux équations pour les deux largeurs inconnues des forces.
4. Résoudre ces équations.
5. Vérifier le résultat.

♢

6.3.4 le produit scalaire

Pour beaucoup des application on utilise des liens entre les longueurs et l'angle entre deux vecteurs.

6–16 Définition : Le **produit scalaire** de deux vecteurs est donné par la définition

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) & \text{si} \quad \|\vec{a}\| \neq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{b}\| \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \|\vec{a}\| = 0 \quad \text{ou} \quad \|\vec{b}\| = 0 \end{cases}$$

On utilise les notations

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

Le produit scalaire est aussi dit **produit interieur** et rend un nombre comme résultat. Pour des vécteurs spécials $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ on trouve

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = 1 \quad \text{et} \quad e_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_x = 0$$

Pour tout vecteur on a

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1$$

et

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_2$$

Si $\vec{n}$ est un vecteur de longueur 1 puis on trouve

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \|\vec{a}\| \cos \angle(\vec{a},\vec{n})$$

La Figure 6.7 montre pourquoi $\vec{a}\cdot\vec{n}$ est dit la **composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$** . On parle de la **projection** de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$. Cette résultat est utile pour beaucoup des applications. Examiner Problème 3–3 (page 86).

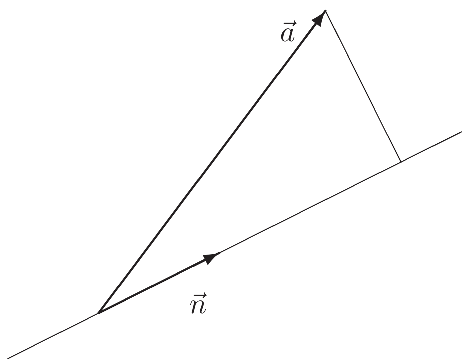


Figure 6.7: Composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$

6–17 Théorème : *On a les règles de calcul suivantes*

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$	*loi de commutativité*
$(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$	*pour* $\lambda\in\mathbb{R}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$	*loi de distributivité*
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \vec{a}$ *orthogonal à* $\vec{b}$	*orthogonalité*
$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$	

Avec le résultat ci–dessus on verifie le théorème suivant.

6–18 Théorème :

1.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

2.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

3.

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|}$$

si $\|\vec{a}\| \neq 0$ *et* $\|\vec{b}\| \neq 0$.

4. Le vecteur $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ *est orthogonal au vecteur* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

6–19 Résultat : *Soit $\vec{n}$ est un vecteur de direction, c.-à-d. $\|\vec{n}\| = 1$. Un vecteur quelconque $\vec{a}$ peut être décomposé dans un vecteurs parallèle à $\vec{n}$ et une composante orthogonale.*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_\perp + \vec{a}_\| \\ \vec{a}_\| &= (\vec{a}\cdot\vec{n})\,\vec{n} \end{aligned}$$

6–20 Exemple : (Théorème d'addition de la fonction $\cos$)
Soit deux vecteurs donnés par

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

Puis les deux vecteurs ont longueurs 1 et il y a un angle de $\alpha - \beta$ entre les vecteurs. Donc on trouve

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \|\vec{r}_1\ \|\vec{r}_2\|\ \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$$

Mais un a aussi

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ sin\beta$$

Les deux résultats doivent être égaux et donc

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta$$

♢

6.4 équations des droites dans le plan

Dans cette section nous examinons des façons différentes de donner une droite dans le plan. Quelques-uns des ces méthodes utilises des vecteurs.

6.4.1 forme générale d'une équation d'une droite

Soit $A, B, C \in \mathbb{R}$ des nombres quelconques. Puis tous les points (x, y) dans le plan tel que

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

forme une droite, caractérisé par les trois nombres A, B, C .

Si les trois nombres sont connus, puis c'est facile d'esquisser la droite en utilisent les points d'intersection avec les deux axes. Sur l'axe des x on a $y = 0$ et donc la valeur de x est donné par l'équation

$$A\,x + C = 0 \quad .$$

D'une façon similaire on arrive à $y = -C/B$ pour la veleur de y sur l'axe des y .

6–21 Exemple : Esquisser la droite

$$2x - 3y + 6 = 0$$

dans un système des coordonnées cartésienne. ♢

6–22 Résultat : *Dans la forme générale de l'équation d'une droite on peut reconnaître quelques cas spéciales*

- *Si* $A = 0$ *puis la droite est parallèle à l'axe des* x *.*
- *Si* $B = 0$ *puis la droite est parallèle à l'axe des* y *.*
- *Si* $C = 0$ *puis la droite passe par l'origine.*

6–23 Exemple : Dans un plan esquisser tous les points (x, y) pour lesquels

$$2x - 3y \leq 6 \qquad .$$

♢

6–24 Exemple : Touver une graphique pour l'ensemble des solutions du système suivante.

$$\begin{array}{rcl} x - y & > & -1 \\ 2x - 3y & \leq & 6 \\ x & > & 0 \\ y & > & 0 \end{array}$$

♢

6.4.2 forme standard d'une équation d'une droite

Une droite dans une système des coordonnées cartésienne (xy) peut être donnée par l'**ordonnée** a et la **pente** m.

$$y = a + m\,x$$

Une droite dans la forme générale avec $B \neq 0$

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

peut être écrit dans la forme standard

$$y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B}\,x$$

Observer que des droites verticales ($B = 0$) n'ont pas de représentation standard.

Deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ sont donnés. Les points déterminent une seule droite et on peut trouver le secteurs a et la pente m. Examiner deux équations pour les deux inconnues a et m.

$$\begin{array}{rcl} y_1 = & m\,x_1 + & a \\ y_2 = & m\,x_2 + & a \end{array}$$

Soustraire les deux équations pour arriver à

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

À l'aide de une des équations on peut déterminer la valeur de a. En Figure 6.8 trouver aussi que

$$\tan\alpha = m \qquad .$$

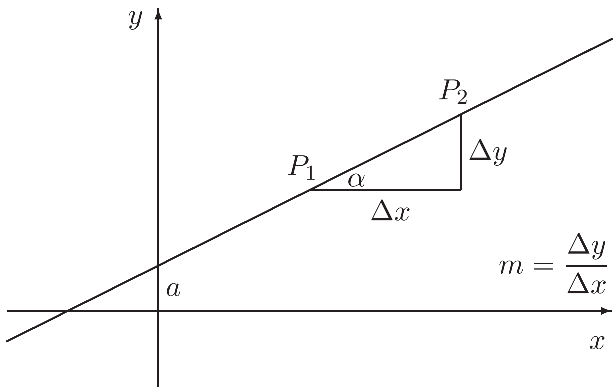


Figure 6.8: Deux points déterminent une droite

6.4.3 forme point–pente de l'équation d'une droite

D'une droite g on connaît un point $P_1 = (x_1, y_1)$ et la pente m, ou l'angle α. Donc la droite est déterminée. Pour écrire la droite dans la forme standard il manque l'ordonnée. En utilisant (x_1, y_1) dans l'équation on arrive à

$$y_1 = m\,x_1 + a$$

ou

$$a = y_1 - m\,x_1 \qquad .$$

6–25 Exemple : Une droite avec pente $m = 1.5$ passe par le point $(3, -1)$. Trouver les deux point d'intersection avec les axes.

Solution: Le point $(3, -1)$ se trouve sur la droite et donc on utilise $y = m\,x + a$ pour arriver à

$$-1 = 1.5 \cdot 3 + a \qquad ,$$

et donc $a = -5.5$. L'équation de la droite est

$$y = 1.5\,x - 5.5$$

L'ordonnée sur l'axe des y est -5.5. Pour trouver l'abscisse sur l'axe des x il faut que $y = 0$ et puis on peut résoudre pour x. Le résultat est $x = 11/3$. $\diamondsuit$

6.4.4 forme deux points de l'équation d'une droite

D'une droite g on connaît deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$. Donc la droite est déterminée. Pour trouver la pente m on utilise

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

et puis on peut continuer avec la méthode pour la forme point–pente.

6–26 Exemple : Examiner la droite qui passe par les points $P_1 = (2, -3)$ et $P_2 = (-1.5, 1)$.

Solution: Pour la pente m on arrive à

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{1 - (-3)}{-1.5 - 2} = \frac{-4}{3.5} = \frac{-8}{7}$$

Puis l'équation

$$\begin{aligned} y_1 &= \; m\,x_1 + \; a \\ -3 &= \; \tfrac{-8}{7}\,2 + \; a \end{aligned}$$

va rendre $a = -5/7$ et on a trouvé l'équation dans la forme standard

$$y = \frac{-8}{7}\,x - \frac{5}{7} \qquad .$$

Vérifier le résultat en utilisant les deux points donnés. $\diamondsuit$

6.4.5 forme paramétrique de l'équation d'une droite

Une droite g peut être donnée par un point sur la droite et la direction. Des vecteurs représentent le point et la direction, voire Figure 6.9. Un **paramètre** t est utiliser pour parcourir la droite. Un point P fait partie de la droite si le vecteur de l'origine au point est de la forme

$$\overrightarrow{P} = \vec{a} + t\vec{v} \quad \text{für ein} \quad t \in \mathbb{R}$$

Si t varie en tout R puis on va couvrir toute la droite.

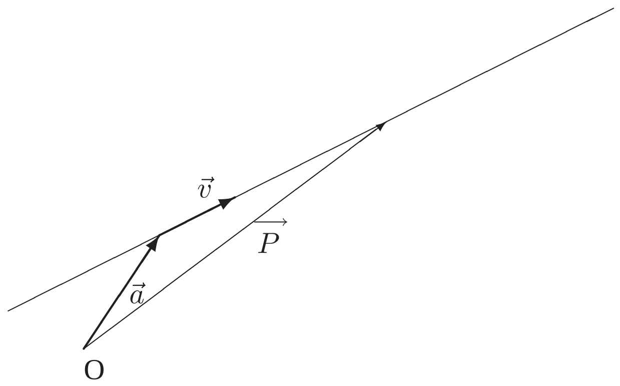


Figure 6.9: Forme paramétrique d'une droite

Les opérations ci–dessus peuvent être écrit avec des coordonnées cartésienne.

$$\vec{P} = \vec{a} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + t\,v_1 \\ a_2 + t\,v_2 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}$$

6–27 Exemple : La droite g est donnée par le point initiale $\vec{a}$ et le vecteur de direction $\vec{v}$ avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Puis tous les points de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ou aussi

$$\begin{aligned} x &= 2 + t\,2.5 \\ y &= -3 - t\,3 \end{aligned} \qquad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

se trouve sur la droite. Donc le point $x = 0$, $y = 1$ ne fait pas partie de la droite, mais le point $x = 7$, $y = 9$ se triuve sur la droite ($t = 2$). ♢

6–28 Exemple : Si une droite est caractérisée par deux points P et Q il est très facile de trouver une forme paramétrique. Choisir un des points comme vecteur de départ et le vecteur de connection comme direction.

$$\vec{P} + t\,\overrightarrow{PQ}$$

Pour trouver la droite qui passe par les points $P = (1, 2.5)$ et $Q = (-2, 4.5)$ utiliser le vecteurs initial $\vec{a}$ et la direction $\vec{v}$ avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4.5-2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Donc une forme paramétrique de la droite est donnée par

$$\begin{aligned} x &= 1 - t\,3 \\ y &= 2.5 + t\,2 \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour arriver à la forme standard il faut éliminer le paramètre t. La première équation implique $t = (1-x)/3$ et donc

$$y = 2.5 + 2\,t = 2.5 + 2\,(1-x)/3 = \frac{-2}{3}\,x + \frac{19}{6}$$

$\diamondsuit$

Observer qu'il existe plusieurs forme paramétrique d'une seule droite, mais une seule forme standard.

6.4.6 forme Hessienne de l'équation d'une droite

Une droite est déterminée par un point (vecteur de position $\vec{a}$) et un **vecteur normale** $\vec{n}$ qui est perpendiculaire (orthogonale) à la direction de la droite. Voir Figure 6.10. Pour que le point $\vec{P}$ est sur la droite le vecteur de connection de $\vec{a}$ à $\vec{P}$ doit être orthogonal à $\vec{n}$, veut dire

$$\begin{aligned}(\vec{P}-\vec{a}) &\perp \vec{n}\\ (\vec{P}-\vec{a})\cdot\vec{n} &= 0\\ \vec{a}\cdot\vec{n} &= \vec{P}\cdot\vec{n}\end{aligned}$$

Pour la deuxième ligne utiliser que deux vecteurs sont perpendiculaire si (et seulement si) le produit scalaire est zéro.

Si les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{n}$ sont connues on peut trouver l'équation de la droite.

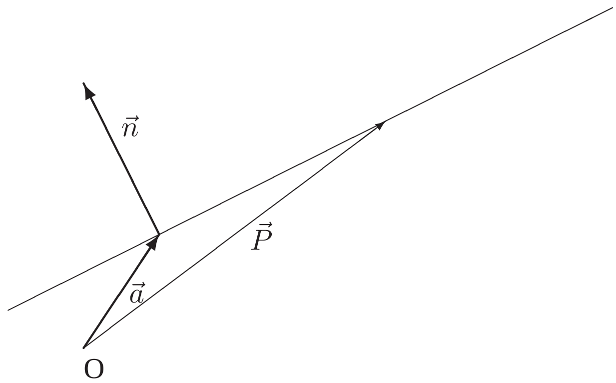


Figure 6.10: Une droite donnée par un point $\vec{a}$ et un vecteur normal $\vec{n}$

6–29 Exemple : Une droite g passe par le point $Q = (-2, 3)$ et le vecteur $\vec{n} = (1, 3)$ est perpendiculaire à g. Trouver l'équation de la droite dans la forme standard.

Solution: Suivant la formule ci–dessus le point (x, y) fait partie de la droite si et seulement si l'équation

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

est satisfaite. Donc on arrive à

$$x + 2 + 3\,y - 3\cdot 3 = 0$$

ou

$$y = \frac{1}{3}\,(-x+7) = \frac{-1}{3}\,x + \frac{7}{3}$$

$\diamondsuit$

Si une droite est donnée par le vecteur $\vec{n}$, la nombre d et l'équation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = d$$

avec $\|\vec{n}\| = 1$, on parle de **forme hessienne normale** de l'équation de la droite. En coordonnées cartésienne on arrive à

$$n_1\,x + n_2\,y = d \quad \text{avec} \quad n_1^2 + n_2^2 = 1$$

La distance de l'origin d'une droite g (donnée dans la forme hessiene) est $|d|$. La droite coupe le plan en deux demi plans. Si le vecteurs normale $\vec{n}$ montre dans le demi plan qui contient l'origin puis on trouve $d > 0$.

6–30 Exemple : Écrire la droite

$$y = 2\,x - 0.5$$

dans la forme hessienne.

Solution:

$$\begin{aligned}
y - 2\,x &= -0.5 \\
\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -0.5 \\
\frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{-0.5}{\sqrt{5}} \\
\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{-0.5}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

♢

6.4.7 distance d'un point à une droite

Une des applications de la forme hessienne de l'équation d'une droite est une méthode pour trouver la distance d'un point $\vec{P} = (x, y)$ de la droite g, donnée par $\vec{n} = (n_1, n_2)$ et d.

L'expression

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = x\,n_1 + y\,n_2$$

correspond à la composante de $\vec{P}$ dans la direction de $\vec{n}$. Si $\vec{P}$ est sur la droite, puis cette expression est égal à zéro. Une graphique simple montre que

$$f\,(x, y) = \vec{P} \cdot \vec{n} - d = x\,n_1 + y\,n_2 - d$$

correspond à une **distance orientée** du point à la droite.

Si d et $f(x, y)$ un le même signe puis l'origine et le point $\vec{P} = (x, y)$ se trouve de la même coté de la droite.

6.4.8 point d'intersection et angle d'intersection de deux droites

Soit deux droites g_1 et g_2 données par

$$\begin{aligned}
g_1 : \quad & y = a_1 + m_1\,x \\
g_2 : \quad & y = a_2 + m_2\,x
\end{aligned}$$

avec $m_1 \neq m_2$.

Le **point d'intersection** est déterminé par la condition que les deux équations doivent être satisfait à la fois. Donc on arrive aux deux équations

$$\begin{aligned}
y - m_1\,x &= a_1 \\
y - m_2\,x &= a_2
\end{aligned}$$

pour les deux inconnues x et y. Parce que $m_1 \neq m_2$ il existe une seul solution de ces équations. Soustraire les équation pour arriver à

$$(m_2 - m_1)\, x = a_1 - a_2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a_1 - a_2}{m_2 - m_1}$$

Cette valeur de x et une des deux équations sont utilisés pour trouver la valeur de y. Multiplier la première équations avec m_2, la deuxième avec m_1, puis soustraire pour obtenir

$$(m_2 - m_1)\, y = m_2 a_1 - m_1 a_2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{m_2 a_1 - m_1 a_2}{m_2 - m_1}$$

Si $m_1 = m_2$, puis les deux droites sont parallèles et if faut différencier deux cas différentes:

- Si les ordonnées sont différentes les droites sont différentes et il n'y a pas de point d'intersection.
- Si les ordonnées sont égals puis les droite coïncides et il existe infiniment des points d'intersection.

6–31 Résultat : *Examiner les point d'intersection de deux droites*

$$\begin{aligned} g_1 : &\qquad y = a_1 + m_1\, x \\ g_2 : &\qquad y = a_2 + m_2\, x \end{aligned}$$

puis les comportements suivantes sont possibles.

pente	*ordonnées*	*nombre des points d'intersection*
$m_1 \neq m_2$		*un seul*
$m_1 = m_2$	$a_1 \neq a_2$	*pas de point*
$m_1 = m_2$	$a_1 = a_2$	*infiniment*

Pour les angles des deux droites on trouve

$$\tan \alpha_i = m_i$$

Si les droites sont ni parallèle, ni perpendiculaire, puis une figure simple montre que l'angle γ entre les droites est caractérisé par

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$$

Donc on arrive à

$$\tan \gamma = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1}$$

et

$$\tan \gamma = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Si les droites ne sont pas perpendiculaire puis on trouve $1 + m_1 m_2 \neq 0$.

À un point d'intersection de deux droites il existe quatre angles, dont deux différentes. La formule ci–dessus rend l'angle utilisé pour tourner (avec orientation positive) la droite avec pente m_1 jusqu'à les deux pentes coïncides.

6.5 équations des cercles

6–32 Définition : Un cercle de **rayon** R et **centre** au point $\vec{M}$ consiste de tous les points tel que

$$\left\| \vec{x} - \vec{M} \right\|^2 = \left(\vec{x} - \vec{M}\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{M}\right) = R^2$$

En multipliant on arrive à une équation quadratiques pour le vecteur $\vec{x}$.

$$\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\,\vec{M} \cdot \vec{x} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

Utiliser les coordonnées cartésiennes $\vec{M} = (u, v)$ pour le centre $\vec{M}$ et on arrive à l'équation

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2$$

6–33 Exemple : L'équation

$$x^2 + y^2 - 4\,x + 6\,y - 3 = 0$$

a un cercle comme ensemble de solution. Compléter les carrées pour arriver à

$$\begin{aligned} x^2 - 4\,x + 4 + y^2 + 6\,y + 9 &= 3 + 4 + 9 \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

Donc c'est un cercle de rayon 4 et centre $(2, -3)$. ♢

6–34 Exemple : Trouver les points d'intersection du cercle (centre $(0, -2)$, rayon 5) avec la droite $x - 2\,y + 1 = 0$.

Solution: D'abord examiner l'équation du cercle.

$$\begin{aligned} x^2 + (y+2)^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 + 4\,y - 21 &= 0 \end{aligned}$$

Il faut combiner les deux équations et puis résoudre le système des deux équations. Utiliser la droite pour conclure que $x = 2\,y - 1$. Puis l'équation du cercle devient une équation quadratique pour la variable y

$$\begin{aligned} (2\,y-1)^2 + y^2 + 4\,y - 21 &= 0 \\ 5\,y^2 + (4-4)\,y - 21 + 1 &= 0 \\ y^2 &= 4 \end{aligned}$$

avec les deux solutions $y_{1,2} = \pm 2$. Donc on trouver les valeurs de $x_{1,2} = 2\,y_{1,2} - 1 = \pm 4 - 1$ et on a trouvé les deux points d'intersection $(3\,,\,2)$ et $(-5\,,\,-2)$. La Figure 6.11 confirme le résultat.

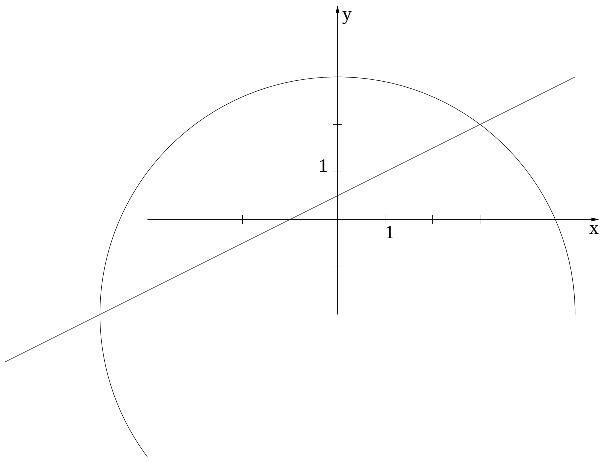


Figure 6.11: Intersection d'un cercle avec une droite

Mathematica sait résoudre ce problème.

Mathematica

```
Solve[{x^2+y^2+4*y-21 == 0 , x-2*y+1 == 0} , {x,y}]
.
{{x -> -5, y -> -2}, {x -> 3, y -> 2}}
```

♢

6–35 Exemple : Examiner deux cercles avec centre $\vec{M}_1 = (2, 1)$ et rayon $r_1 = 2$, respectivement $\vec{M}_2 = (0, -2)$ et $r_2 = 3$. Trouver les points d'intersections.

Solution: If faut résoudre les deux équations des cercles pour les variables x et y.

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &+ (y-1)^2 &= 2^2 \\ x^2 &+ (y+2)^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

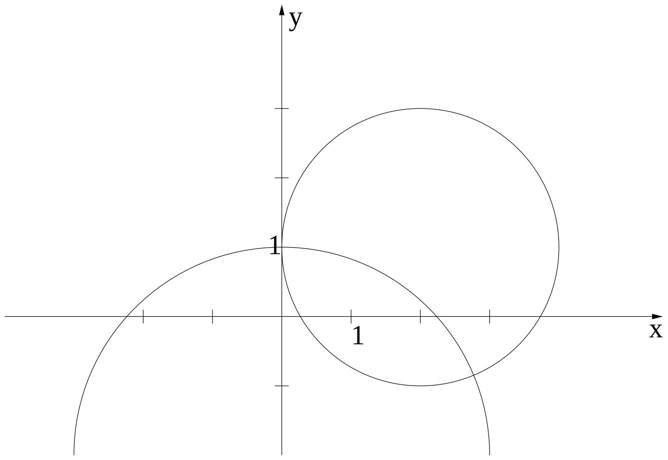


Figure 6.12: Intersection de deux cercles

Soustraction des deux équations élimine tous les termes quadratiques et on arrive à

$$\begin{array}{rcccl} -4\,x+4 & + & (-6\,y+1-4) & = & 4-9 \\ -4\,x & - & 6\,y & = & -6 \end{array}$$

Donc les deux points d'intersection se trouve sur une droite $x=-\frac{3}{2}\,y+\frac{3}{2}$. Utiliser cette information dans la deuxième équation des cercles pour trouver une équation quadratique pour l'inconnu y.

$$\begin{array}{rcccl} (-\frac{3}{2}\,y+\frac{3}{2})^2 & + & (y+2)^2 & = & 3^2 \\ (3\,y-3)^2 & + & 4\,(y+2)^2 & = & 4\cdot 9 \\ 13\,y^2 & -2\,y & -11 & = & 0 \end{array}$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$y_{1,2}=\frac{+2\pm\sqrt{2^2+4\cdot 13\cdot 11}}{26}=\frac{+2\pm 24}{26}=\begin{cases} 1 \\ \frac{-11}{13} \end{cases}$$

À l'aide de l'équation de la droite on trouve les valeurs de x et donc on a les deux points d'intersection $(0,1)$ et $(\frac{36}{13},\frac{-11}{13})$. ♢

6–36 Exemple : Examiner tout les points $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ dont les distances des points fixes $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ ont un rapport fixe λ. Montrer que ces points forme un cercle, le cercle de **Apollonius**.

Solution: Les deux distances d_i sont données par

$$\begin{array}{rcl} d_1^2 & = & (\vec{x}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_1) \\ d_2^2 & = & (\vec{x}-\vec{r}_2)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_2) \end{array}$$

Le rapport des deux distances est dit λ et donc on a les équations suivantes.

$$\begin{array}{rcl} d_1^2 & = & \lambda^2\,d_2^2 \\ (\vec{x}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_1) & = & \lambda^2\,(\vec{x}-\vec{r}_2)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_2) \\ \vec{x}\cdot\vec{x}-2\,\vec{r}_1\cdot\vec{x}+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 & = & \lambda^2\,\left(\vec{x}\cdot\vec{x}-2\,\vec{r}_2\cdot\vec{x}+\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2\right) \\ (1-\lambda^2)\,\vec{x}\cdot\vec{x}-2\,(\vec{r}_1-\lambda^2\,\vec{r}_2)\cdot\vec{x}+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1-\lambda^2\,\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2 & = & 0 \\ \vec{x}\cdot\vec{x}-2\,\vec{M}\cdot\vec{x}+\vec{M}\cdot\vec{M}-R^2 & = & 0 \end{array}$$

L'ensemble de solutions est un cercle avec les data

$$\begin{array}{rcl} \vec{M} & = & \dfrac{1}{1-\lambda^2}\,\left(\vec{r}_1-\lambda^2\,\vec{r}_2\right) \\ R^2 & = & \vec{M}\cdot\vec{M}-\dfrac{\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1-\lambda^2\,\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2}{1-\lambda^2} \end{array}$$

Le cas spécial $\lambda = 1$ ne obtient pas de cercle mais une droite, la **médiatrice**. Le calcul ci–dessus rend l'équation de cette droite [1]

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{x}+d = -2\,(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{x}+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1-\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2 &= 0 \\ (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot(\vec{x}-\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

Alors le centre $\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$ des deux points se trouve sur la droite et la direction est perpendiculaire au vecteur de connection $\vec{r}_1-\vec{r}_2$. ♢

6–37 Exemple : Un point $\vec{r}$ soit sur un cercle avec centre $\vec{M}$ et rayon R. Le vecteur $\vec{t}$ est un **vecteur tangent** au cercle au point $\vec{r}$. Donc le vecteur de connection du centre $\vec{M}$ au point $\vec{r}$ doit être perpendiculaire à $\vec{t}$. Alors on trouve

$$\vec{v}\cdot\left(\vec{r}-\vec{M}\right)=0$$

Remplacer le vecteur $\vec{v}$ par un vecteur de connection $\vec{x}-\vec{r}$ d'un point arbitraire $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ au point $\vec{r}$ sur le cercle pour obtenir l'équation de la **tangente** du cercle au point $\vec{r}$.

$$(\vec{x}-\vec{r})\cdot\left(\vec{r}-\vec{M}\right)=0$$

♢

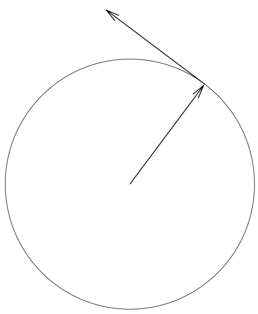


Figure 6.13: Tangente pour un cercle

6–38 Exemple : Soit $\vec{n}$ un vecteur de direction ($\|\vec{n}\|=1$) et examiner un cercle de rayon R avec centre $\vec{M}$, donné par l'équation

$$\vec{x}\cdot\vec{x}-2\,\vec{M}\cdot\vec{x}+\vec{M}\cdot\vec{M}-R^2=0$$

La droite, donneée par la paramétrisation

$$\vec{x}\,(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\,\vec{n}=t\,\vec{n}$$

a 0, 1 ou 2 points d'intersection avec le cercle. Si on trouve deux points ils sont caractérisés par l'équation quadratique

$$t^2\,\vec{n}\cdot\vec{n}-t\,2\,\vec{M}\cdot\vec{n}+\vec{M}\cdot\vec{M}-R^2=0$$

Le paramètre t represente la distance des points de l'origin (utiliser la normalisation $\|\vec{n}\|=1$). La formule de Viète implique que le produit des deux solutions t_1 et t_2 de l'équation

$$t^2+b\,t+c=0$$

est $t_1\cdot t_2=c$¿ Dans cette exemple on trouve

$$t_1\,t_2=\vec{M}\cdot\vec{M}-R^2$$

Cette largeur est dit **puissance** de l'origine par rapport au cercle et ne dépend pas du vecteur $\vec{n}$. On obtient le **théorème des sécantes**.

[1]Utiliser $(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1+-\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_2\cdot\vec{r}_1-\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2=\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1-\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2$.

Si deux sécantes se coupes hors du cercle, alors le produit des segments compris entre le point d'intersection des deux sécantes et les points d'intersections de chacune des sécantes avec le cercle et le même pour chaque sécante.

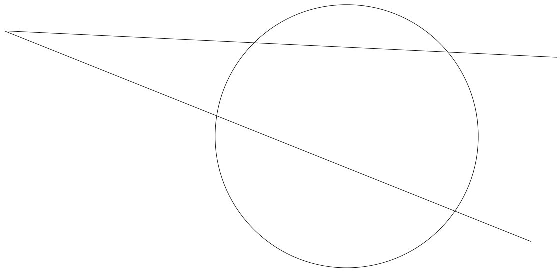


Figure 6.14: théorème des sécantes

◇

6.6 vecteurs dans l'espace

Les vecteurs sont aussi considérés des objets dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Les idées des vecteurs dans le plan s'adapte facilement à cette nouvelle situation.

6.6.1 coordonnées cartésienne

Dans l'espace on choisit l'origine 0 et trois directions spéciales $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$ et $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$, tel que $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ et les trois directions sont perpendiculaires. Les trois vecteurs suit la **règle de la main droite**; veut dire l'identification suivant est possible sans casser des doigts.

$\vec{e}_x$	correspond au pouce de la main droit
$\vec{e}_y$	correspond au doigt de représentation de la main droit
$\vec{e}_z$	correspond au majeur de la main droit

On dit que

les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ forme un **système droit**

Examiner Figure 6.15 . Les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont dit des **vecteurs d'unité des coordonnées**.

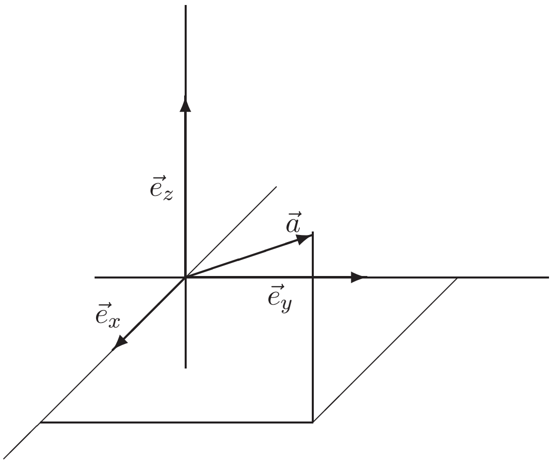


Figure 6.15: coordonnés certésienne en $\mathbb{R}^3$

Examiner un vecteur „arbitraire“ $\vec{a}$ dans l'espace. Pour l'exemple en Figure 6.15 on a

$$\vec{a} = 2\,\vec{e}_x + 1.5\,\vec{e}_y + 1\,\vec{e}_z \qquad .$$

Si la formule ci–dessus est donné il est façile de de construire le vecteurs $\vec{a}$. Donc le vecteur $\vec{a}$ correspond au triple des nombres $(2\,,\,1.5\,,\,1)$.

Figure 6.15 montre que chaque vecteur $\vec{a}$ peut être écrit dans la forme

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y + a_3\,\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y + a_3\,\vec{e}_z = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3}$$

Les nombres a_i sont dit les **coordonnées** du vecteur $\vec{a}$ et $a_i\,\vec{e}_i$ sont les **composantes** du vecteur. Cette représentation d'un vecteur par un triple des nombres est dit la **représentation cartésienne**.

Pour les vecteurs d'unité des coordonnées $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ on trouve

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.6.2 opérations avec des vecteurs

Considerer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Examiner les opération de base avec des vecteurs. Il est important de visualiser ces règles de calcul et les interprétations géométrique.

6–39 Résultat :

- *addition*

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

- *multiplication avec un scalaire*

$$\lambda\,\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \\ \lambda\,a_3 \end{pmatrix}$$

- *longueur d'un vecteur*

$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Tout règle de calcul de la section précédente est correcte. Vérifier à l'aide de quelques exemples.

6.6.3 le produit scalaire

Comme dans le plan le produit scalaire est caractérisé par la propriété

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos\angle(\vec{a},\vec{b}) & \text{si} \quad \|\vec{a}\| \neq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{b}\| \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \|\vec{a}\| = 0 \quad \text{ou} \quad \|\vec{b}\| = 0 \end{cases}$$

On utilise les notations

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

Pour les vecteurs spécials $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ on trouve

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$$

Pour des vecteurs quelconques on arrive à

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{e}_x &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \\ \vec{a} \cdot \vec{e}_y &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2 \\ \vec{a} \cdot \vec{e}_z &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_3 \end{aligned}$$

On a les règles suivantes

6–40 Théorème :

$$\begin{array}{ll}
\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} & \textit{loi de commutativité} \\
(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) & \textit{pour} \quad \lambda\in\mathbb{R} \\
(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} & \textit{loi de distributivité} \\
\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}\ \textit{orthogonal à}\ \vec{b} & \textit{orthogonalité} \\
\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} &
\end{array}$$

A l'aide du résultat ci-dessus on vérifie les formules suivantes.

6–41 Théorème :

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 \\
\|\vec{a}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\
\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|} \quad \textit{si}\ \ \|\vec{a}\|\neq 0\ \textit{et}\ \ \|\vec{b}\|\neq 0
\end{aligned}$$

6.6.4 le produit vectorielle

Le produit **scalaire** de deux vecteurs rend un scalaire comme résultat. Le **produit vectorielle** de deux vecteurs rend un vecteur comme résultat. Ce vecteur a les propriétés suivantes.

6–42 Définition :
Pour deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ le produit vectorielle $\vec{a}\times\vec{b}$ est un vecteur caractérisé par

(1) $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\ \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

(2) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaire à $\vec{a}\times\vec{b}$

(3) les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ forme un **système droit**

L'angle doit être entre 0 et π .

6–43 Exemple : Pour les vecteurs d'unités des coordonnées on trouve

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x\times\vec{e}_y &= \vec{e}_z = -\vec{e}_y\times\vec{e}_x \\
\vec{e}_y\times\vec{e}_z &= \vec{e}_x = -\vec{e}_z\times\vec{e}_y \\
\vec{e}_z\times\vec{e}_x &= \vec{e}_y = -\vec{e}_x\times\vec{e}_z
\end{aligned}$$

♢

6–44 Résultat : *Pour deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ on arrive à*

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\ \sin\angle(\vec{a},\vec{b}) = \textit{ aire du parallélogramme}$$

Démonstration : Figure 6.16 montre que la hauteur du parallélogramme est donné par $h = \|\vec{b}\|\sin\alpha$ et donc l'aire du parallélogramme est égal au produit de hauteur et largeur

$$\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\ \sin\alpha = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

□

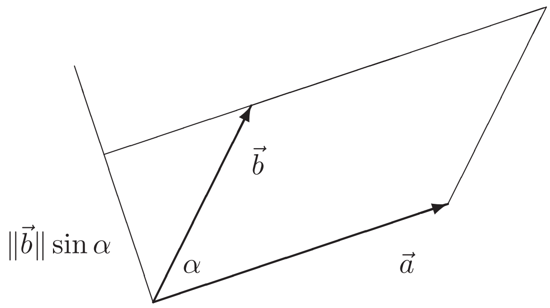


Figure 6.16: produit vectorielle et parallélogramme

6–45 Résultat : *La définition du produit vectorielle montre que pour des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on trouve des règles suivantes.*

a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ *et* $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

b) $\lambda\ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda\ \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\ \vec{b}\right)$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ *ou* $\vec{b} = \vec{0}$ *ou* $\vec{a}$ *est perpendiculaire à* $\vec{b}$.

d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *(loi de distributivité)*

Démonstration : Les preuves des résultats a), b) et c) sont des conséquences de la définition géométrique du produit vectorielle. Pour vérifier d) examinons d'abord le cas spécial $\vec{a} = \vec{e}_z$. Pour ce cas la troisième composante de $\vec{b}$ n'importe pas pour l'aire du parallélogramme généré par les vecteurs $\vec{e}_z$ et $\vec{b}$. Puis utiliser que le vecteur $\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec longueur identique. Les deux sont orthogonal à $\vec{e}_z$. Alors on arrive à

$$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec des arguments similaires on trouve

$$\vec{e}_z \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} -b_2 - c_2 \\ b_1 + c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{e}_z \times \vec{b} + \vec{e}_z \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 - c_2 \\ b_1 + c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc on vient de vérifier d), si $\vec{a} = \vec{e}_z$. Si la longueur de $\vec{a}$ n'est pas 1, puis multiplier toutes les calculations ci–dessus par le facteur $\|\vec{a}\|$ pour vérifier d) . La défini on géométrique du produit vectorielle ne dépend pas de l'orientation des vecteurs d'unités des coordonnées, alors on choisit le système tel que $\vec{e}_z$ montre dans la direction de $\vec{a}$. Donc les arguments ci–dessus sont applicables et on a vérifier le résultat d) . $\square$

6–46 Résultat : *Pour les coordonnées cartésienne on trouve*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}$$

6–47 Remarque : Utilisant la notation d'une **déterminant** il existe une aide mémoire pour le produit vectorielle

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_y & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_z & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\
&= \vec{e}_x \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} - \vec{e}_y \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} + \vec{e}_z \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

♢

Démonstration : Examiner d'abord l'expression

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \vec{e}_x \times (b_1\, \vec{e}_x + b_2\, \vec{e}_y + b_3\, \vec{e}_z) \\
&= b_1\, \vec{e}_x \times \vec{e}_x + b_2\, \vec{e}_x \times \vec{e}_y + b_3\, \vec{e}_x \times \vec{e}_z = b_1\, \vec{0} + b_2\, \vec{e}_z - b_3\, \vec{e}_y \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Un calcul similaire pour les vecteurs $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_y$ et les règles de calcul rend

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= (a_1\, \vec{e}_x + a_2\, \vec{e}_y + a_3\, \vec{e}_z) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1\, \vec{e}_x \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + a_2\, \vec{e}_y \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + a_3\, \vec{e}_z \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} b_3 \\ 0 \\ -b_1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

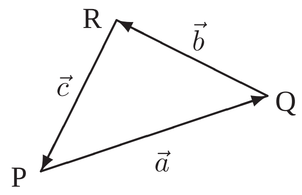


Figure 6.17: aire d'un triangle

6–48 Exemple : (aire d'un triangle)
Si les trois coins d'un triangle sont donnés par les vecteurs $\vec P$, $\vec Q$ et $\vec R$, puis les trois cotés sont représentés par

$$\vec a = \vec Q - \vec P \quad , \quad \vec b = \vec R - \vec Q \quad \text{und} \quad \vec c = \vec P - \vec R$$

L'aire du parallélogramme généré par $\vec a$ et $\vec b$ est donné par $\|\vec a \times \vec b\|$ et donc

$$\text{aire du triangle} \quad = \frac{1}{2} \, \|\vec a \times \vec b\|$$

Observer que la formula est applicable pour des triangle dans l'espace. On aurrait aussi put utiliser les vecteurs $\vec b$ et $\vec c$. Alors

$$\text{aire du triangle} \quad = \frac{1}{2} \, \|\vec b \times \vec c\|$$

Évidemment les deux formules doivent rendre des résultats identiques. Pour vérifier utiliser

$$\begin{aligned} \vec a + \vec b + \vec c &= \vec 0 \\ \vec c &= -\vec a - \vec b \\ \vec b \times \vec c &= \vec b \times \left(-\vec a - \vec b\right) = -\vec b \times \vec a - \vec b \times \vec b \\ &= \vec a \times \vec b - \vec 0 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

6–49 Exemple : Deux vecteurs sont parallèle si et seulement si le produit vectoriel est $\vec 0$. Utiliser ce résultat pour examiner si trois points se trouve sur une droite. Examiner les points

$$\vec P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec Q = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec R = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puis calculer les vecteurs

$$\vec a = \vec Q - \vec P = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec b = \vec R - \vec P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et leur produit vectorielle

$$\vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1) - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 - (-4)\cdot(-1) \\ (-4)\cdot 1 - (-2)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puis les deux vecteurs $\vec a$ et $\vec b$ sont parallèles et les points se trouvent sur une droite. $\diamondsuit$

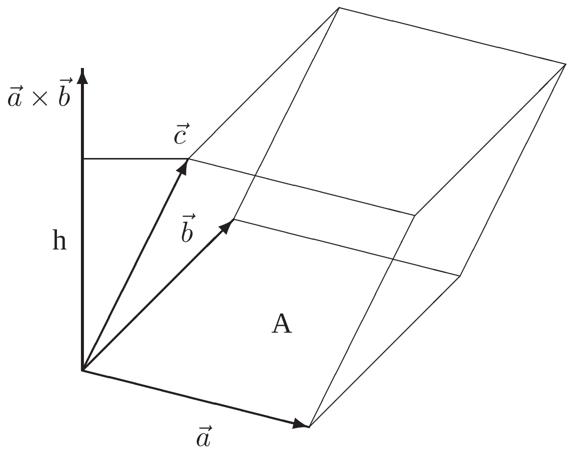


Figure 6.18: produit triple

6.6.5 produit triple

Examiner le volume du parallélépipède généré par trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, regarder Figure 6.18. L'aire de la base A est donnée par

$$A = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

et la hauteur h est déterminée par la composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{a}\times\vec{b}$. Trouver h à l'aide du produit scalaire

$$h = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\cdot\vec{c}$$

Donc le volume V et donné par le produit de l'aire de la base avec la hauteur.

$$V = A\cdot h = \|\vec{a}\times\vec{b}\|\,\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Cette formule rend le **volume orienté** du parallélépipède généré par trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Si $V>0$ les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ (dans cette ordre) forme un système droit. Si $V>0$ les trois vecteurs forme un système droit. Utiliser la notation

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Puisque le volume du parallélépipède ne dépend pas de l'ordre des vecteurs on arrive à

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right] = \left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right] = -\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right] = -\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]$$

6–50 Résultat : *En utilisant la notation de la **déterminante** on peut reécrire le produit triple comme*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} \quad = \quad \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$$

6–51 Exemple : Ã l'aide du triple produit on peut décider si quatre points se trouve dans un plan. Comme exemple prendre les quatre points.

$$(5,2,1) \quad , \quad (-6,3,-2) \quad , \quad (2,5,2) \quad \text{et} \quad (0,0,-2)$$

Choisir le premier point comme point de départ et trouver les quatre vecteurs de différences.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Les quatre point se trouve dans un plan si le volume V du parallélépipède généré par $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est zéro. Pour trouver V utiliser le produit triple.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & - & (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot (-3) & - & (-11) \cdot 1 \\ (-11) \cdot 3 & - & 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

et donc

$$V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -50 - 40 + 90 = 0$$

Donc les quatre points se trouve dans un seul plan. Arriver au même résultat à l'aide de la déterminante

$$\det \begin{bmatrix} -11 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \ldots = 0$$

Verifier le résultat avec *Mathematica*

Mathematica

```
Needs["LinearAlgebra`CrossProduct`"]
a={-11,1,-3}
b={-3,3,1}
c={-5,-2,-3}
Cross[a,b]
Cross[a,b].c
```

◇

6–52 Résultat : *Le volume du tétraèdre avec les coins $\vec{0}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est ègal à un sixième du volume du parallélépipède généré par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Donc on trouve pour les volumes orientés.*

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6}\, V_{Spat} = \frac{1}{6}\, \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \frac{1}{6}\, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Démonstration : Pour vérifier cette identité examiner Figure 6.19. Le demi parallélépipède avec les coins ABCDEF consiste de trois pyramides. Les pyramides ABCD et DFEC ont des volumes identiques, comme les pyramides ABCD et BCDF . Pour vérifier trouver les bases avec aires identiques et les mêmes hauteurs. □

6–53 Exemple : Comme exemple prendre le tétraèdre avec les coins $\vec{0}$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

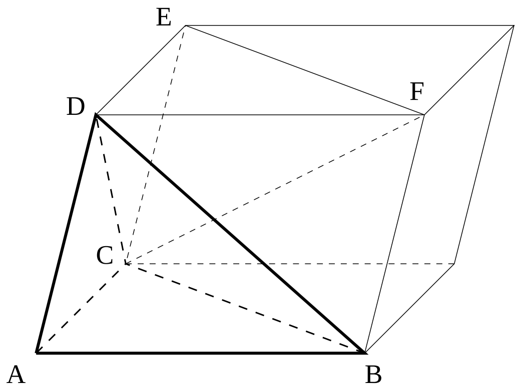


Figure 6.19: volume d'un tétraèdre

Calculer le produit triple à l'aide de

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 24 + 24 = 48$$

L'ordre inhabituelle des vecteurs ne change que le signe du résultat, mais simplifie les calculations.

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6}\, V_{Spat} = \frac{48}{6} = 8$$

$\diamondsuit$

6.7 équations des plans

6.7.1 forme générale d'une équation d'un plan

La forme générale d'une équation d'une droite est

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

avec des constantes réels a, b, c et d. Le plan E consiste de tous les points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que l'équation ci–dessus est satisfaite. Sur l'axe des x on a $y = z = 0$ et donc le point d'intersection avec l'axe des x est déterminé par l'équation $a\,x + d = 0$. On arrive à

$$\begin{aligned} x &= -\frac{d}{a} && \text{intersection sur l'axe des } x \\ y &= -\frac{d}{b} && \text{intersection sur l'axe des } y \\ z &= -\frac{c}{a} && \text{intersection sur l'axe des } z \end{aligned}$$

Si il n'y a pas de terme y dans l'équation ($b = 0$), puis la valeur de y n'importe pas pour vérifier si le point se trouve dans le plans. Alors le plan est parallèle à l'axe des y et typiquement il n'y a pas de point d'intersection avec cette axe.

Observer que le plan ci–dessus ne déterminé pas une équation. Pour un seul plan plusieurs équations différentes sont possibles. Les deuz équations

$$\begin{aligned} 1.5\,x - 2\,y + 4\,z + 7 &= 0 \\ -3\,x + 4\,y - 8\,z - 14 &= 0 \end{aligned}$$

rendent un seul plan (ensemble des solutions). Une équation peut être multipliée par une constante (ne pas zéro). Donc des quatre constantes a, b, c et d seulement trois sont des „vrais“ constantes. Un plan est déminé par trois points.

6–54 Exemple : Trouver l'équation d'un plan qui passe par les trois points

$$(1/2/-3) \quad , \quad (0/-4/0) \quad \text{et} \quad (3/-1/3)$$

Il est possible de trouver les valeurs des constantes. ♢

Solution : L'équation est de la forme

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

Utiliser les trois points donnés pour arriver à trois équations pour quatre inconnus[2].

$$\begin{aligned} a\,1 \quad +b\,2 \quad -c\,3 + d &= 0 \\ a\,0 \quad -b\,4 \quad -c\,0 + d &= 0 \\ a\,3 \quad -b\,1 \quad +c\,3 + d &= 0 \end{aligned}$$

On a trop de inconnus et donc „choisir“ $d = 4$. Puis la deuxième équation permet une solution avec des nombres entier et on arrive au système

$$\begin{array}{rrrl} a & +2\,b & -3\,c = & -4 \\ & -4\,b & = & -4 \\ 3\,a & -1\,b & +3\,c = & -4 \end{array}$$

La deuxième équation rend $b = 1$ et donc le système

$$\begin{array}{rl} a & -3\,c = -6 \\ 3\,a & +3\,c = -3 \end{array}$$

Addition des deux équations donne $a = -9/4$ et donc $3\,c = a + 6 = 15/4$. Puis on arrive à la solution

$$\frac{-9}{4}\,x + y + \frac{5}{4}\,z + 4 = 0$$

Pour obtenir des nobres entier multiplier l'équation avec 4

$$-9\,x + 4\,y + 5\,z + 16 = 0$$

Maintenant il est façile de trouver les intersections avec les axes.

$$\begin{array}{ll} x = +\dfrac{16}{9} & \text{intersection sur l'axe des } x \\ y = -\dfrac{16}{4} & \text{intersection sur l'axe des } y \\ z = -\dfrac{16}{5} & \text{intersection sur l'axe des } z \end{array}$$

□

6–55 Définition : La **trace** un pln général

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

dans le plan des xy est la droite d'intersection des deux plans. Elle est caractérisé par la condition $z = 0$ (plan de sxy) et l'équation du plan ci–dessus. Donc on trouve

$$a\,x + b\,y + d = 0$$

[2]Plus tard on va voir des méthodes systématique pour résoudre ce type de problème.

6–56 Exemple : Les équations der trois traces du plan

$$7\,x - 3\,y + \pi\,z - 99 = 0$$

sont données par

$$\begin{array}{ll} \text{dans le plan } xy & +7\,x - 3\,y - 99 = 0 \\ \text{dans le plan } xz & +7\,x + \pi\,z - 99 = 0 \\ \text{dans le plan } yz & -3\,y + \pi\,z - 99 = 0 \end{array}$$

$\diamondsuit$

6.7.2 forme paramétrique de l'équation d'un plan

Un plan est déterminé par un point $\vec{p}$ dans le plan et deux vecteurs de directions $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Puis tous les points dans le plan E sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

ou bref

$$\vec{x} = \vec{p} + u\,\vec{a} + v\,\vec{b} \quad \text{avec} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Si les paramètres u et v atteinds tous les nombres réels on obtient tout le plan. Examiner Figure 6.20.

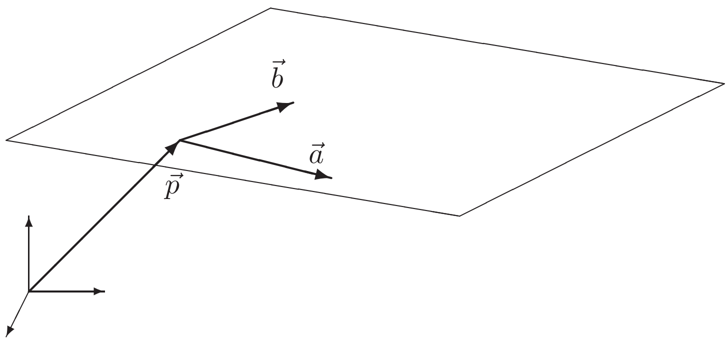


Figure 6.20: paramétrisation d'un plan

6–57 Exemple : Si l'origine (0/0/0) est dans un plan puis les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sont parallèles au plan E. Une forme paramétrique du plan est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

ou en utilisant des composantes

$$\begin{aligned} x &= +3\,u - 5\,v \\ y &= -6\,u - 4\,v \\ z &= -10\,u - 2\,v \end{aligned}$$

Utiliser deux de ces trois équations pour éliminer les paramètres u et v

$$y - 2\,z = 14\,u + 0\,v \quad \text{et donc} \quad u = \frac{y - 2\,z}{14}$$

Addition du double de la première équation à la deuxième produit

$$2\,x + y = 0\,u - 14\,v \quad \text{et donc} \quad v = \frac{-2\,x - y - 2}{14}$$

Utiliser ces deux valeurs pour u et v dans la première équation pour obtenir une des forme standard de l'équation de ce plan.

$$14\,x = 3\;(y - 2\,z) - 5\;(-2\,x - y) = 10\,x + 8\,y - 6\,z$$

et puis

$$4\,x - 8\,y + 6\,z = 0$$

ou

$$2\,x - 4\,y + 3\,z = 0$$

$\diamondsuit$

6.7.3 vecteurs normales

Un plan E est déterminé par un point $\vec{p}$ dans le plan et un vecteur normale $\vec{n} \neq \vec{0}$. Le point $\vec{x} = \vec{p} + \vec{a}$ se trouve dans le plan si le vecteur $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{n}$. Examiner cette situation en Figure 6.21 pour trouver la condition

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{p}) &\perp \vec{n} \\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{n} &= \vec{p} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

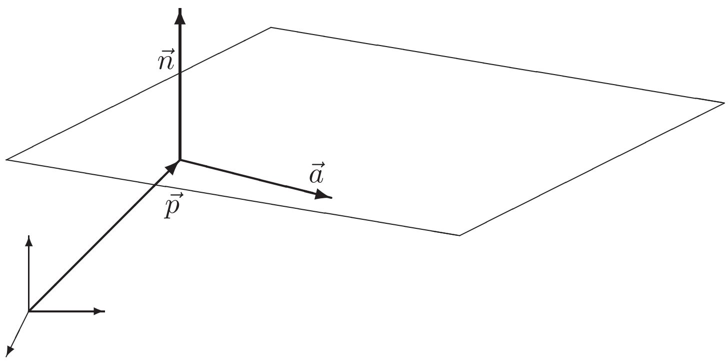


Figure 6.21: un plan, donné par un point et un vecteur normal

6–58 Exemple : Trouver le plan par le point $\vec{p}$, perpendiculaire au vecteur $\vec{n}$, avec

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solution: Utiliser la condition ci–dessus et calculer les produit scalaire pour arriver à la forme générale de cette équation d'un plan.

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{n} &= \vec{p} \cdot \vec{n} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ -x + 3\,y + 2\,z &= 2 + 21 + 0 = 23 \end{aligned}$$

◇

L'exemple ci–dessus montre que les coefficients a, b et c dans la forme générale

$$a\,x + b\,y + c\,z = -d$$

corresponds au vecteur normale

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -\,d = \vec{n} \cdot \vec{p}$$

6–59 Exemple : Si un plan est donné par un point $\vec{p}$ dans le plan et deux vecteurs de direction $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (parallèle au plan), puis un vecteur normale est donné par le produit véctorielle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Voir Figure 6.22.

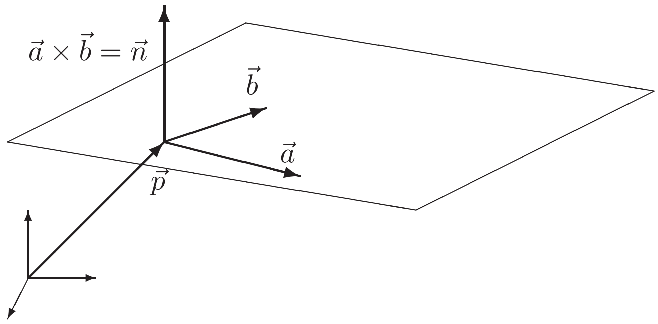


Figure 6.22: un plan, donnépar un point et deux vecteurs de direction

Si le point $(3/2/1)$ se trouve dans le plan et le vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sont parallèle au plan E, puis un vecteur normale es donné par

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 56 \\ -42 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Seulement la direction du vecteur normale est important (pour le moment) et donc on choisit des nombres plus simples $\vec{n} = (-2\,,\,4\,,\,-3)^T$ et on arrive à l'équation du plan

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{x} &= \vec{n} \cdot \vec{p} \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -2\,x + 4\,y - 3\,z &= -6 + 8 - 3 = -1 \end{aligned}$$

◇

6–60 Exemple : Trouver l'équation du plan par les trois points

$$(1/2/-3) \quad , \quad (0/-4/0) \quad \text{et} \quad (3/-1/3)$$

Trouver la solution de cet exemple à page 192 avec une méthode différente.

Solution: Choisir le premier point comme point initial et puis deux vecteurs de direction sont donnés par les vecteurs de différences.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Le produit vectorielle rend un vecteur normal

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

et donc une équation pour ce plan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

ou

$$-27\,x + 12\,y + 15\,z = -48$$

Diviser par 3 pour obtenir

$$-9\,x + 4\,y + 5\,z + 16 = 0$$

Cette réponse coïncide avec la solution de l'exemple de page 192. ♢

6.7.4 forme Hessienne, distance d'un point du plan

Pour un vecteur normal $\vec{n}$ seulement la direction est important, donc on pout choisir sa longeur. Un bon choix est donné par la **normalisation** du vecteur normal à un **vecteur d'unité**, veut dire

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1$$

Parce que la longueur de $\vec{n}$ est 1 le produit scalaire $\vec{p} \cdot \vec{n} = -d$ correspond à la composante de $\vec{p}$ dans la direction de $\vec{n}$, voir Figure 6.23. Ce nombre est la distance orienté de l'origine de ce plan.

$$n_1\,x + n_2\,y + n_3\,z + d = 0$$

Pour un vecteur quelconque $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ le produit $\vec{x} \cdot \vec{n}$ rend la composante de $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{n}$. Donc l'expression

$$h = \vec{x} \cdot \vec{n} - d = \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n} = (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}$$

correspond à la **distance orientée** du point $\vec{x}$ du plan. La distance géométrique est donnée par la valeur absolue de la distance orientée. Le signe indique de quel coté du plan se trouve le point. Si pour deux points on obtiens le même signe puis le points se trouve de la même coté.

Le vecteur

$$\vec{x}_p = \vec{x} - h\,\vec{n} = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n} - d)\ \vec{n}$$

correspond à la **projection orthogonale** du point $\vec{x}$ sur le plan. Pour vérifier cette résultat utiliser deux observation:

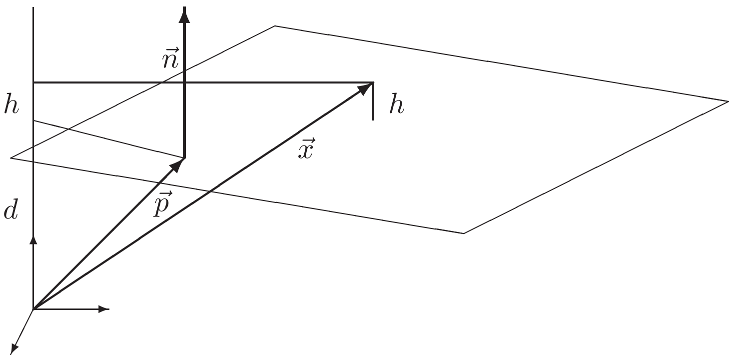


Figure 6.23: forme Hessienne de l'équation d'un plan

1. $\vec{x}_p$ se trouve dans le plan:
   Calculer la distance du point du plan par

$$\begin{aligned} \text{distance} &= \vec{x}_p \cdot \vec{n} - d = \vec{x} \cdot \vec{n} - (\vec{x} \cdot \vec{n} - d)\ \vec{n} \cdot n - d \\ &= \vec{x} \cdot \vec{n} - (\vec{x} \cdot \vec{n} - d)\ 1 - d = 0 \end{aligned}$$

2. $\vec{x} - \vec{x}_p$ est perpendiculaire au plan
   A cause de

$$\vec{x} - \vec{x}_p = \vec{x} - (\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n} - d)\ \vec{n}) = (\vec{x} \cdot \vec{n} - d)\ \vec{n}$$

   ce vecteur est un mutiple du vecteur normal $\vec{n}$ et donc orthogonal au plan.

6.8 équations des sphères

Une sphère (surface d'une boule) dans l'espace $\mathbb{R}^3$ correspond à un cercle en $\mathbb{R}^2$. Donc les idées, méthodes et résultats sont similaires.

6–61 Définition : Une sphère avec centre $\vec{M}$ et rayon R consiste de tous les points $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels

$$\left\|\vec{x} - \vec{M}\right\|^2 = \left(\vec{x} - \vec{M}\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{M}\right) = R^2$$

Multiplier les expression dans les parenthèses pour obtenir une équation quadratique pour le vecteur $\vec{x}$.

$$\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\,\vec{M} \cdot \vec{x} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

Si le centre de la sphère est donné par $\vec{M} = (u, v, w)^T$ puis cette équation devient

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2$$

6–62 Exemple : Soit $\vec{r}$ un point sur la sphère avec centre $\vec{M}$ et rayon R. Le vecteur $\vec{v}$ est un **vecteur tangent** si il est perpendiculaire au vecteur de connection de $\vec{M}$ au point $\vec{x}$. Donc la condition est

$$\vec{v} \cdot \left(\vec{r} - \vec{M}\right) = 0$$

Remplacer le vecteur $\vec{v}$ par un vecteur de connection $\vec{x} - \vec{r}$ d'un point arbitraire $\vec{x}$ avec le point $\vec{r}$ sur la sphère pour arriver à l'équation du **plan tangent** à cette sphère au point $\vec{r}$.

$$(\vec{x} - \vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{M}) = 0$$

$\diamondsuit$

6–63 Exemple : Le point $(3/2/1)$ se trouver sur une sphère avec centre $(5/1/3)$ et rayon 3. Trouver

(a) l'équation de cette sphére.

(b) l'équation du plan tangent pour ce point et sphère.

(c) la trace de ce plan dans le plan yz, veut dire $x = 0$.

Solution: L'éqiation de cette sphère est donné par

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 3^2$$

Mettre $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ pour verifier que le point $(3/2/1)$ se trouver effectivement sur la sphère.

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 2^2 + 1 + 2^2 = 3^2$$

Le vecteur de connection du centre au point de contact est

$$\vec{r} - \vec{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

et donc l'équation du plan tangent est donné par

$$\begin{aligned}
(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \left(\vec{r} - \vec{M}\right) &= 0 \\
\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\
-2\,x + 6 + y - 2 - 2\,z + 2 &= 0 \\
-2\,x + y - 2\,z &= -6
\end{aligned}$$

Mettre $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ pour verifier que le point $(3/2/1)$ fait partie du plan.

$$-2 \cdot 3 + 2 - 2 = -6$$

Pour trouver la trace de ce plan dans le plan $x = 0$ on arriva à

$$y - 2\,z = -6$$

À l'aide de *Mathematica* générer la Figure 6.24. Le code produit d'abord le plot pour la shpère et pius le plan tangent. Après les des graphiques sont combinées à l'aide du command `Show[]` dans une seule graphique.

Mathematica

```
Kugel[r_,phi_] := {5 + r Cos[phi] , 1+ r Sin[phi] ,3 − Sqrt[9−r^2]}
KugelPlot=ParametricPlot3D[Kugel[r,phi],{r,0,3},{phi,0,2Pi}]
```

Mathematica

```
Ebene[x_,y_] := {x,y,(6−2x+y)/2}
EbenenPlot=ParametricPlot3D[Ebene[x,y],{x,0,5},{y,−3,3}]
```

Mathematica

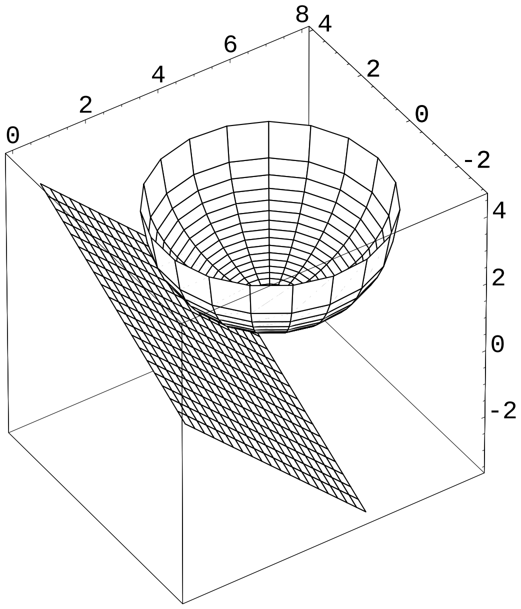


Figure 6.24: sphère et plan tangent

```
Show[EbenenPlot, KugelPlot, ViewPoint -> {-20,-30,30}]
```

$\diamondsuit$

6–64 Exemple : Soit $\vec{n}$ un vecteur de direction avec $\|\vec{n}\| = 1$ et examier une sphère avec centre $\vec{M}$ et rayon R, donner par l'équation

$$\vec{x}\cdot\vec{x} - 2\,\vec{M}\cdot\vec{x} + \vec{M}\cdot\vec{M} - R^2 = 0$$

La doite donné par la paramétrisation

$$\vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\vec{n}$$

a zéro, un ou deux points d'intersection avec la sphère. Ces point sont caractérisés par l'équation quadratique

$$t^2\;\vec{n}\cdot\vec{n} - t\;2\,\vec{M}\cdot\vec{n} + \vec{M}\cdot\vec{M} - R^2 = 0$$

Les longueurs des secteur de l'origine au point d'intersection sont données par $|t_1$ et $|t_2|$, parce que $\|\vec{n}\| = 1$. Pour le produit des deux solution t_1 et t_2 de l'équation

$$t^2 + b\,t + c = 0$$

on trouve $t_1\,t_2 = c$ (Viète) et donc

$$t_1\;t_2 = \vec{M}\cdot\vec{M} - R^2$$

Cette valeur est indépendante du vecteur de direction $\vec{n}$.

Cette calculation montre que le **théorème des sécantes** de la géométrie dans le plan $\mathbb{R}^2$ est aussi correct pour des sphères dans l'espace $\mathbb{R}^3$. $\diamondsuit$

6.9 problèmes

6.9.1 opérations avec des vecteurs

• **Problème 6–1:**
Dessiner la droite

$$3x - 2y + 6 = 0$$

dans un systèm cartésienne. Trover la longeur des deux séction sur les axes.

• **Problème 6–2:**
Esquisser la droite

$$8x - y - 12 = 0$$

et decider si elle passe par les points $P_1 = (1.5, 0)$, $P_2 = (4, 4)$ et $P_3 = (3, 2)$.

• **Problème 6–3:**
Dessiner l'ensemble des solution du système des inégalités ci–dessous.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6 &\geq 0 \\ 3x - 2y - 9 &\leq 0 \\ x + y - 2 &\geq 0 \\ x &\leq 5 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

• **Problème 6–4:**
Dessiner l'ensemble des solution du système des inégalités ci–dessous.

$$\begin{aligned} x - 2y + 4 &\geq 0 \\ x + y - 2 &\geq 0 \\ x + 2y - 10 &\leq 0 \\ 3x - y - 9 &\leq 0 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

• **Problème 6–5:**
Démontrer que

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 .$$

Tip: utiliser les définitions géométriques des produits scalaires et véctorielles.

6.9.2 droites et plans

• **Problème 6–6:**
Une droite passe par les points $(1.5\ ,\ -2)$ et $(2\ ,\ 3)$. Trouver l'équation de la droite dans la forme standard et les deux intersections avec les axes.

• **Problème 6–7:**
Examiner le système des inégalités ci–dessous dans le plan xy.

(a) Écrire dans la forme standard des droites 1, 2 et 3.

(b) Esquisser l'ensemble des solutions.

(c) Trouver les coordonnés du point dans l'ensemble de solution avec la valeur y le plus grand possible.

1 :	$3\,y + x \leq 9$
2 :	au–dessous de la droite qui passe par le point $(1,0)$ avec une pente de 2
3 :	au–dessus de la droite qui passe par les deux points $(2,1)$ et $(8,4)$

• Problème 6–8:
Examiner le système des inégalités ci–dessous dans le plan xy.

(a) Écrire dans la forme standard des droites 1, 2 et 3.

(b) Esquisser l'ensemble des solutions.

(c) Trouver les coordonnés du point dans l'ensemble de solution avec la valeur x le plus grand possible.

1 :	$y + \frac{x}{2} \leq 4$
2 :	au–dessous de la droite qui passe par le point $(1,4)$ avec une pente de 3
3 :	au–dessus de la droite qui passe par les deux points $(3,1)$ et $(7,3)$
4 :	$x > 0$ et $y > 0$

• Problème 6–9:
Transformer l'éuqation de la droite $8x - 6y + 25 = 0$ dans la forme hessienne.

• Problème 6–10:
Quel est la distance des deux points $\vec{P} = (1,3)$ et $\vec{Q} = (5,2)$ de la droite $5x - 12y + 1 = 0$?

• Problème 6–11:
Trouver la forme standard d'une droite avec distance 2 de origine et la droite est perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = (1,-2)$.

• Problème 6–12:
Trouver la forme standard d'une droite avec distance 4 de origine et la droite est passe par le point $\vec{P} = (4,-2)$.

• Problème 6–13:
Deux droites sont donnés par les valeurs de m_1, m_2, a_1, a_2 et les équatiuons

$$y = m_1\,x + a_1 \quad \text{und} \quad y = m_2\,x + a_2$$

Trouver une conditions pour m_1 et m_2 tel que les deux droites sont perpendiculaire.
Tip: $\tan\alpha_1 = m_1$, $\tan\alpha_2 = m_2$ et $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi/2$.

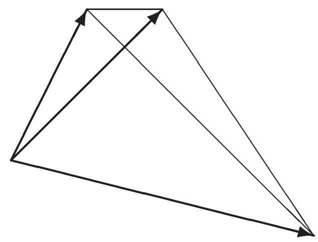
• Problème 6–14:
Deux droites sont perpendiculaire et se coupes dans le point $(-2, 1.5)$. L'ordonnée sur l'axe des y de la première droite est 2. Trouver l'équation de la deuxième droite dans la forme standard.

• Problème 6–15:
Déterminer l'angle entre les deux droites.

$$\begin{aligned} 2x - y - 3 &= 0 \\ x - 2y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

• Problème 6–16:
Rendre des résultats **exactes**. Travailler avec les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \pi \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ -2\,\pi \end{pmatrix}$$



(a) Calculer

$$\vec{a} + 3\,\vec{b} \quad , \quad 2\,\vec{a}\cdot\vec{c} \quad \text{et} \quad \vec{b}\times\vec{c}$$

(b) Trouver une équation d'une droite qui passe par le point $(2/2/0)$ et dont le vector de direction est orthogonal au vecteur $\vec{a}$.

(c) Trouver le volume du tétraèdre généré par les trois vecteurs.

• Problème 6–17:
On donne la droite

$$g: \; y = 3x + 1 \qquad .$$

Déterminer la droite qui est orthogonal par rapport á la droite g et qui passe par le point $(1, 4)$.

• Problème 6–18:
Déterminer le point d'intersection S du plan $x - y + 2z - 3 = 0$ avec la droite passant par les points $A(-1, 0, 4)$ et $B(1, 2, 0)$.

• Problème 6–19:
Etablir l'équation paramétrique de la droite d'intersection du plan

$$x - 2y + z = 0$$

avec le plan passant par les points $A(2, 3, 1),\ B(-3, 0, 2)$ et $C(1, 2, 3)$.

• Problème 6–20:
Etant donné le plan $\epsilon: \; x + 4y - 3z + 9 = 0$ et le point $P(0, -5, 5)$. Déterminer l'image $\overline{P}$ de P par rapport au plan ϵ.

• Problème 6–21:
Déterminer l'angle aigu entre les plans $2x + 3y + 4z - 6 = 0$ et $3x - 2y - z + 4 = 0$.

• Problème 6–22:
De quels points sur la droite

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

apparaissent le segment de $A = (1, 0, 2)$ à $B(5, -4, 0)$ sous un angle droit ?

• Problème 6–23:

(a) Trouver l'équation du plan E avec vecteur normal $\vec{n} = (1\ ,\ -1\ ,\ 2)^T$ et une distance $\sqrt{6}$ de l'origine, qui se trouve au dessus du plan.

(b) Trouver une paramétrisation de la droite d'intersection du plan E ci–dessus et le plan $x + y + z = 2$.

• Problème 6–24:
Calculer l'aire du triangle $A(1, -1, 3),\ B(2, 1, 3),\ C(4, 1, -3)$.

• Problème 6–25:
Déterminer l'équation paramétrique de la droite passant par $P(1, 0, 3)$ et qui est orthogonal par rapport aux droites

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• **Problème 6–26:**
Etant donné les deux plans $2x - y + 3z + 4 = 0,\ x + y - 2z - 3 = 0$ et le point $P(2, 0, -1)$. Etablir l'équation paramétrique de la droite passant par P et qui est parallèle par rapport aux deux plans.

• **Problème 6–27:**
Démontrer que les points $A(-3, -7),\ B(-6, 5)$ et $C(5, -39)$ se trouvent sur la même droite.

• **Problème 6–28:**
Vérifier que les quatres points sont das un seul plan.

(a)

$$(0, 2, 4) \quad , \quad (1, 0, 5) \quad , \quad (2, 2, 4) \quad \text{et} \quad (1, 4, 3)$$

(b)

$$(3, 1, -4) \quad , \quad (-1, 3, 8) \quad , \quad (-2, -1, 2) \quad \text{et} \quad (1, -1, -4)$$

• **Problème 6–29:**
Un plan passe par les trois points ci–dessous

$$A\,(0/3/2) \quad , \quad B\,(-2/3/0.5) \quad , \quad C\,(4/2/1)$$

(a) Trouver l'équation du plan.

(b) Trouver les longeurs des trois sections sur les axes.

(c) Trouver un vecteur normale du plan.

• **Problème 6–30:**
Calculer le volume des tétraèdres ci–dessous.

(a) A(2/3/3), B(4/-1/4), C(1/1/-2), D(5/1/0)

(b) A(0/2/3), B(-2/2/-1), C(4/-2/2), D(3/6/0)

(c) A(0/2/4), B(1/0/5), C(2/2/4), D(3/1/0)

• **Problème 6–31:**
Un cône avec sommet à l'origin et l'axe dans la direction du vecteur $\vec{d}$ est definie par la condition que l'angle α entre un vecteur $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{d}$ est fix.

Trouver l'équation du manteau du cône avec demi–angle d'ouverture $\alpha = 30^\circ$ et l'axe dans la direction de $\vec{d} = (1, 2, 0)^T$. Le sommet est à l'origin. Exprimer l'équation en terme de x, y et z. Reécrice cette équation comme équation quadratique pour les variables.

• **Problème 6–32:**
Un tétraèdre est donné par les quatres sommets $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (2, 3, 0)$ et $P_3 = (4, 4, 1)$. Le quatrième sommet P_4 se trouve sur la droite

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

Trouver la position exacte du quatrième sommet P_4 tel que le volume du tétraèdre est 10 .

• **Problème 6–33:**
Examiner les deux points $\vec{A} = (1, 2, 5)$ et $\vec{B} = (7, 4, 3)$ et la droite g donnée par la paramétrisation

$$g \ : \qquad \vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Trouver un point $\vec{C}$ sur la droite g tel que le triangle ABC soit isocèle. ($AC = BC$).

(b) Calculer l'aire de ce triangle.

• **Problème 6–34:**
Un plan E et la doite g, donné par

$$g\ :\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -\pi \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

n'ont pas de point d'intersection. Les points $P_1 = (1/2/-4)$ et $P_2 = (0/2/-1)$ se trouve dans le plan E. Trouver la forme Hessienne de l'équation de ce plan.

• **Problème 6–35:**
Un plan E est donné par $x + 2\,y + 2\,z = 27$. Trouver une forme paramétrique $\vec{r} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$, tel que les trois vecteurs $\vec{r}$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonals. De plus on demande que les longueurs de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont égales à 1.

• **Problème 6–36:**
Un tétraèdre dans $\mathbb{R}^3$ est donné par les points ci–dessous.

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le volume du tétraèdre.

(b) Calculer la surface totale du tétraèdre.

6.9.3 cercles et boules

• **Problème 6–37:**
Déterminer le centre et le rayon du cercle qui passent par les points $A(6,-1)$ et $B(4,5)$ et dont le centre se trouve sur la droite ci–dessous.

$$g\ :\ 3x + 5y - 11 = 0$$

• **Problème 6–38:**
Etant donné deux points $A(0,0)$ et $B(5,0)$. Déterminer tous les points dont la distance de B et la double de la distance de A.

• **Problème 6–39:**
Etablir l'équation de la tangente au cercle K en point P :

(a) $K\ :\ x^2 + y^2 + 16x - 4y + 43 = 0,\ \ P(-5,y),\ y < 0;$

(b) $K\ :\ 4x^2 + 4y^2 + 24x + 16y + 27 = 0,\ \ P(-1.5,0);$

• **Problème 6–40:**

(a) Trouver l'équation de la tangente d'un cercle avec centre $M\,(3/4)$ et par le point $P\,(2/1)$.

(b) Trover la distance de cette droite du point $Q\,(-2,3)$.

• **Problème 6–41:**
Examiner un cercle avec centre au point $\vec{M} = (4,2)$ et rayon $R = 3$.

(a) Trouver les points d'intersection avec la droite $y = 2\,x - 4$.

(b) Pour quels valeurs du paramètre λ la droite $y = 2\,x + \lambda$ est une tangente au cercle?

• **Problème 6–42:**
Déterminer les points d'intersection de la sphère avec le centre M et le rayon R avec la droite passant par A et B :

a) $M(0,0,0),\ R = 11,\ A(0,6,10),\ B(2,6,9);$

b) $M(6,-10,-9),\ R=17,\ A(0,5,3),\ B(-7,8,3)$;

• Problème 6–43:
Déterminer les équations des plans tangentes au sphère avec le centre $M(0,0,0)$ et le rayon $R = 3$ en points $P(2,y,2)$.

• Problème 6–44:
Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par $P(2,-5,3)$ et qui est parallèle par rapport au plan

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Problème 6–45:
Une boule en $\mathbb{R}^3$ est donnée par l'équation

$$x^2 - 4\,x + y^2 + 6\,y + z^2 + 9 = 0$$

(a) Trouver le centre et le rayon de cette boule.

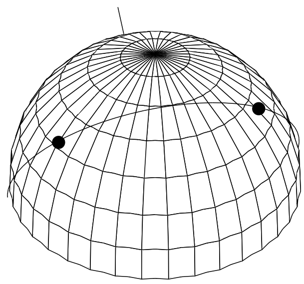
(b) Déterminer la distance du plan $x + y + 2z = 17$ de cette boule.

• Problème 6–46:
Une boule K de rayon $R = 6$ touche le plan $x - 2\,y + 2\,z - 1 = 0$ au point $x = 1$, $y = 3$ et $z =$? La boule est au–dessus du plan. Trouve un des points d'intersection de la boule K avec la droite g donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

• Problème 6–47:

Soit la demie sphère nord de la terre à droite avec un rayon $R = 6300$ km. On donne la position de la ville de Zürich (CH) et de Salt Lake City (USA) dans la table ci–dessous.



	latitude	longitude
Zürich	$47°$	$+8°$
Salt Lake City	$41°$	$-112°$

La liaison la plus courte entre les deux villes à la surface de la terre est dans un plan qui passe par l'origine et les deux villes, c.-à.-d. suivant un grand cercle.

(a) Représenter les positions des deux villes par des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(b) Trouver la distance entre les deux villes, mesurée le long d'une droite.

(c) Trouver la distance entre les deux villes, mesurée à la surface de la terre.

(d) Trouver un vecteur normal du plan avec ce grand cercle.

(e) Trouver la latitude maximale sur le grand cercle entre les deux villes.

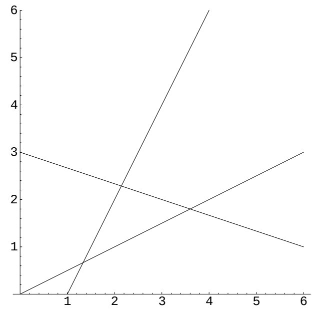
6.9.4 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 6–7 :

(a)

Die Standardform einer Geradengleichung ist $y = a \cdot x + b$.

$$\begin{aligned} \text{Gerade 1} &: \quad y(x) = 3 - \frac{1}{3}\,x \\ \text{Gerade 2} &: \quad y(x) = -2 + 2\,x \\ \text{Gerade 3} &: \quad y(x) = \frac{1}{2}\,x \end{aligned}$$



(b) Die Figur oben rechts zeigt die Graphen der drei Funktionen. Die gesuchte Lösungsmenge entspricht dem kleinen, geschlossenen Dreieck rechts.

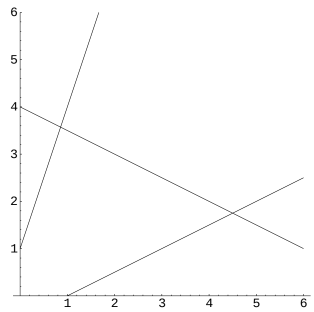
(c) In der Figur ist auch ablesbar, dass der am weitesten oben liegende Punkte (grösster Wert der y–Koordinate) gegeben ist als Schnittpunkt der Geraden 1 und 2. Die x–Koordinate des Schnittpunktes der Geraden 1 und 3 ist gegeben als Lösung der Gleichung $3 - \frac{1}{3}\,x = -2 + 2\,x$. Das führt auf $\frac{7}{3}\,x = 5$ und somit $x = \frac{15}{7}$. Der y–Wert kann bestimmt werden mit Hilfe einer der beiden Geraden, z.B. $y = -2 + 2\,\frac{15}{7} = \frac{16}{7}$. Somit hat der gesuchte Punkte die Koordinaten $(x, y) = (\frac{15}{7}\,,\,\frac{16}{7})$.

Solution pour problème 6–8 :

(a)

La forme standard d'une équation d'une droite est $y = a \cdot x + b$.

$$\begin{aligned} \text{droite 1} &: \quad y(x) = 4 - \frac{1}{2}\,x \\ \text{droite 2} &: \quad y(x) = 1 + 3\,x \\ \text{droite 3} &: \quad y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x \end{aligned}$$



(b) La graphique ci–dessus montre les graphes des trois fonctions. L'ensemble de solution correspond au petit triangle à droite.

Lire aussi dans la graphique que le point avec la composante x le plus grande est le point d'intersections des droites 1 et 3.

(c) La composante x de ce point d'intersection des droites 1 et 3 est solution de l'équation $4 - \frac{1}{2}\,x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x$. On arrive à $x = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. La valeur de y peut être calculer à l'aide de une des deux droites, par exemple $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{9}{2} = \frac{7}{4} = 2.75$. Alors on obtiens les coordonnées $(x, y) = (4.5\,,\,2.75)$.

Solution pour problème 6–9 : $-0.8x + 0.6y - 2.5 = 0$.

Solution pour problème 6–10 : 2.31 et -0.15. Les signes différentes indiques que les deux points se trouve des cotées différentes de la droites.

Solution pour problème 6–11 : L'équation doit être de la forme

$$1\,x - 2\,y = d$$

Utiliser la forme hessienne pour déterminer la valeur de d.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,x - \frac{2}{\sqrt{5}}\,y = \frac{d}{\sqrt{5}}$$

On obtient

$$\frac{d}{\sqrt{5}} = \pm 2$$

avec les deux solutions

$$d = \pm 2\,\sqrt{5}$$

Alors l'équation de la droite est

$$1\,x - 2\,y = \pm 2\,\sqrt{5}$$

Solution pour problème 6–13 : $m_2 = -1/m1$

Solution pour problème 6–15 : $\gamma \approx 143.1°$.

Solution pour problème 6–16 :

(a)

$$\vec{a} + 3\,\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ \pi + 6 \end{pmatrix} \quad , \quad 2\,\vec{a}\cdot\vec{c} = 4\,(e - \pi^2) \quad \text{et} \quad \vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} -2\,\pi \\ 2\,e - 4\,\pi \\ -e \end{pmatrix}$$

(b) Le vecteur de direction $\vec{d}$ de la droite doit être perpendiculaire à $\vec{a}$. Un choix simple est $\vec{d} = (-3, 2, 0)^T$. On arrive à la droite paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

Des autres solutions sont possibles.

(c)

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \frac{1}{6}\,\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right| \\ &= \frac{1}{6}\,\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\,\pi \\ 2\,e - 4\,\pi \\ -e \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{6}\,\left|-16\,\pi + 6\,e - e\,\pi\right| \end{aligned}$$

Solution pour problème 6–17 : $x + 3y - 13 = 0$.

Solution pour problème 6–18 : $S(0, 1, 2)$;

Solution pour problème 6–19 :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 6–20 : $\overline{P}(2, 3, -1)$.

Solution pour problème 6–21 : $78.6°$

Solution pour problème 6–22 : $P_1 = (2, -4, -1)$ et $P_2(4, 0, 3)$

Solution pour problème 6–23 :

(a) Verwende die Hessesche Normalenform um den Abstand zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|\vec{n}\|}\,\vec{n}\cdot\vec{x} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \pm\sqrt{6}\\ x-y+2\,z &= \pm 6\end{aligned}$$

Damit der Ursprung oberhalb der Ebene liegt, muss der Wert von z bei $x=y=0$ negativ sein. Somit ist die Ebenengleichung $x-y+2\,z=-6$.

(b) Zu bestimmen sind die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2\,z & = & -6\\ x & + & y & + & z & = & 2\end{array}$$

Mit Hilfe von erweiterten Matrizen erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\1&1&1&2\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\0&2&-1&8\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\0&1&-1/2&4\end{array}\right]$$

Wähle $z=t$ als Parameter und man erhält $y=4+z/2=4+t/2$ und $x=-6+y-2\,z=-6+4+t/2-2\,t=-2-\frac{3}{2}\,t$ und somit

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

Solution pour problème 6–24 : 7

Solution pour problème 6–25 :

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Solution pour problème 6–26 :

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\7\\3\end{pmatrix}$$

Solution pour problème 6–28 : Controller à l'aide de *Mathematica*.

Mathematica

```
Needs["LinearAlgebra`CrossProduct`"]
a={0,2,4};
b={1,0,5};
c={2,2,2};
d={1,4,3};
Cross[b-a,c-a].(d-a)
.
0
```

Solution pour problème 6–29 :

(a) Les vecteurs de connection des trois points sont

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1.5\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Alors le vecteur normal du plan est donné par

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Une solution pour l'équation du plan est donc

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} &= 0 \\ -1.5\,x - 8\,y + 2\,z &= -24 + 4 \\ 3\,x + 16\,y - 4\,z &= 40 \end{aligned}$$

(b) Les trois section sur les axes sont façile a trouver.

$$x_{sec} = \frac{40}{3} \quad , \quad y_{sec} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad z_{sec} = -10$$

(c) Trouver le vecteur normal ci–dessus, par exemple $\vec{n} = (3, 16, -4)^T$.

Mathematica

```
f[x_,y_,z_] := a x + b y + c z + d
Solve[ {f[0,3,2]==0,
        f[-2,3,1/2]==0,
        f[4,2,1]==0}] /. d -> 40
Solve::svars:
   Warning: Equations may not give solutions
     for all "solve" variables.
.
{{a -> -3, b -> -16, c -> 4}}
```

L'équation est

$$-3\,x - 16\,y + 4\,z + 40 = 0$$

Solution pour problème 6–30 : Verifier à l'aide de *Mathematica*.

Mathematica

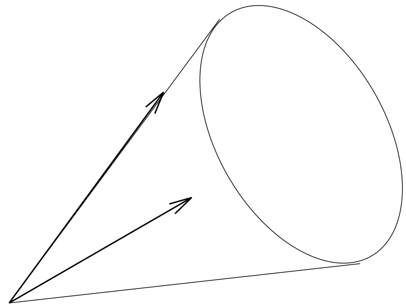
```
Needs["LinearAlgebra`CrossProduct`"]
a={2,3,3};
b={4,-1,4};
c={1,1,-2};
d={5,1,0};
1/6 Cross[b-a,c-a].(d-a)
.
12
```

Solution pour problème 6–31 :
On trouve

$$\vec{x}\cdot\vec{d} = \|\vec{x}\|\;\|\vec{d}\|\;\cos\alpha$$

Utiliser $\vec{d} = (1,2,0)^T$, $\alpha = 30^\circ$ et cos $\alpha = \sqrt{3}/2$. Donc

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{5}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\\ x+2\,y &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\frac{\sqrt{15}}{2}\\ (x+2\,y)^2 &= \left(x^2+y^2+z^2\right)\,\frac{15}{4}\end{aligned}$$

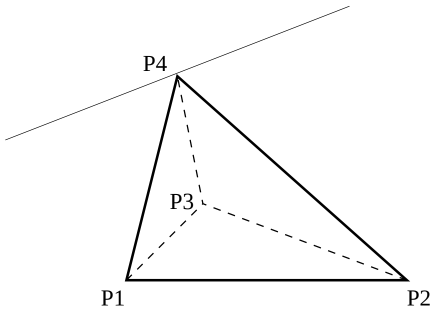


On trouve une équation quadratique pour x, y et z.

Solution pour problème 6–32 :

Trouver le volume du tétraèdre à l'aide du triple produit.

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{6}\,\left[\vec{AB}\,,\,\vec{AC}\,,\,\vec{AD}\right]\\ &= \frac{1}{6}\,\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}\end{aligned}$$



Choisir le point D sur cette droite, tel que $V = 10$. On arrive à une équation pour le paramètre t.

$$6\,V(t) = \left(\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1+t\\1+2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1+t\\1+2t\end{pmatrix} = 2-6\,t$$

Alors l'équation à résoudre est

$$V = \frac{1}{3} - t = 10 \qquad\Longleftrightarrow\qquad t = -\frac{29}{3}$$

Le point P_4 sur la droite est donné par

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{29}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{-29}{3}\\\frac{-55}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-9.667\\-18.333\end{pmatrix}$$

Solution pour problème 6–33 :

(a)

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\,(t)-\vec{A}\|^2 &= \|\vec{x}\,(t)-\vec{B}\|^2\\ (5+t\,4)^2+(7-t\,3)^2+(3+t\,5)^2 &= (-1+t\,4)^2+(5-t\,3)^2+(5+t\,5)^2\\ 83+t\,2\cdot 14+t^2\,50 &= 51+t\,2\cdot 6+t^2\,50\\ t\,16 &= 51-83=-32\\ t &= -2\end{aligned}$$

Utiliser $t = 2$ en $\vec{x}(t)$ rend $\vec{C} = (-2\,,\,15\,,\,-2)$

(b) Trouver l'aire à l'aide du produit vectorielle.

$$(\vec{A}-\vec{C})\times(\vec{B}-\vec{C}) = \begin{pmatrix}12\\48\\84\end{pmatrix}$$

Alors

$$\text{aire} \quad = \frac{1}{2}\,\|(\vec{A}-\vec{C})\times(\vec{B}-\vec{C})\| \approx 6\,\sqrt{66} \approx 48.7$$

Solution pour problème 6–34 :

La droite g est parallèle au plan E, donc le vecteur de direction de la droite est aussi vecteur de direction du plan. Un deuxième vecteur de direction est donné par le vecteur de connection $\vec{P}_1 - \vec{P}_2$. Alors on arrive au vecteur normal du plan

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le point $\vec{P}$ fait partie du plan et alors

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 17$$

Une forme normale de l'équation du plan est

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 17 = 0$$

Pour la forme Hessienne il faut encore normaliser le vecteur $\vec{n}$.

$$\frac{3\,x + 9\,y + z - 17}{\sqrt{91}} = 0$$

Solution pour problème 6–35 : Un vecteur normal est donné par

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de location $\vec{r}$ dans le plan doit être un multiple du vecteur $\vec{n}$, parce qu'il est perpendiculaire au deux vecteurs de direction $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (graphique). Alors $\vec{r} = \lambda\,\vec{n}$. Utiliser cette condition dans l'équation du plan.

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = \lambda\vec{n}\cdot\vec{n} = \lambda\|\vec{n}\|^2 = \lambda\,9 = 27$$

On arrive à $\lambda = 3$ et $\vec{r} = (3,6,6)^T$.

Les deux vecteurs de direction $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaire à $\vec{n}$. Produire des tels vecteurs à l'aide du produit vectorielle.

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \vec{b}_0 &= \vec{a}\times\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normalisez ces vecteurs.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{1}{\|\vec{a}_0\|}\,\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{b} &= \frac{1}{\|\vec{b}_0\|}\,\vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors l'équation du plan est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{t}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{s}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'autres solutions sont possibles.

Solution pour problème 6–36 : Soit

$$\vec{a} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \vec{P}_3 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \vec{P}_4 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a)

$$\text{Vol } = \frac{1}{6}\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -1$$

Alors le volume est 1, avec orientation négative du tétraèdre.

(b) Trouver les aires des quatre faces et puis additionner.

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\| &= 9 \\ \|\vec{a} \times \vec{c}\| &= \sqrt{5} \\ \|\vec{b} \times \vec{c}\| &= 2\sqrt{89} \\ \|(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\| &= 2\sqrt{35} \end{aligned}$$

Addition et puis diviser par deux pour arriver à une aire de ≈ 20.9681 .

Solution pour problème 6–37 : $M(2,1),\ R = \sqrt{20}$;

Solution pour problème 6–38 : Cercle acvec le centre $M(-5/3, 0)$ et le rayon $R = 10/3$.

Solution pour problème 6–39 : a) $3x - 4y + 7 = 0$, b) $6x + 8y + 9 = 0$

Solution pour problème 6–40 :

(a)

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{P}) &\perp (\vec{M} - \vec{P}) \\ \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} &\perp \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ x + 3\,y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

(b) forme Hessienne $(1^2 + 3^2 = 10)$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\ (x + 3\,y - 5) = 0$$

Utiliser $(x, y) = (-2, 3)$ pour trouver la distance orintée.

$$\text{distance } = \frac{1}{\sqrt{10}}\ (-2 + 3 \cdot 3 - 5) = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

Solution pour problème 6–41 :

(a) Kreisgleichung ist $(x-4)^2+(y-2)^2=9$. Setz man die Geradengleichung $y=2\,x-4$ ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für x.

$$\begin{aligned}
(x-4)^2+(y-2)^2 &= 9\\
(x-4)^2+(2\,x-4-2)^2 &= 9\\
(x^2-8\,x+16)+(4\,x^2-24\,x+36)-9 &= 0\\
5\,x^2-32\,x+43 &= 0\\
x_{1,2} &= \frac{32\pm\sqrt{32^2-20\cdot 43}}{10}=\frac{16\pm\sqrt{41}}{5}\approx\begin{cases}1.91938\\4.48062\end{cases}\\
y_{1,2} &= 2\,x_{1,2}-4=\frac{12\pm 2\sqrt{41}}{5}\approx\begin{cases}-0.16125\\4.96125\end{cases}
\end{aligned}$$

Somit ist $(x_1,y_1)\approx(1.91938\,,\,-0.16125)$ und $(x_2,y_2)\approx(4.48062\,,\,4.96125)$.

(b) Kreisgleichung ist $(x-4)^2+(y-2)^2=9$. Setz man die Geradengleichung $y=2\,x-\lambda$ ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für x.

$$\begin{aligned}
(x-4)^2+(y-2)^2 &= 9\\
(x-4)^2+(2\,x+\lambda-2)^2 &= 9\\
(x^2-8\,x+16)+(4\,x^2+\lambda^2+4+4\,\lambda\,x-8\,x-4\,\lambda)-9 &= 0\\
5\,x^2+(4\,\lambda-16)\,x+\lambda^2-4\,\lambda+11 &= 0
\end{aligned}$$

Die Gerade ist eine Tangente, falls die beiden Lösungen zusammenfallen. Somit muss die Diskriminate ($b^2-4\,a\,c$) Null sein. Das ergibt eine quadratische Gleichung für den Parameter λ.

$$\begin{aligned}
(4\,\lambda-16)^2-4\cdot 5\cdot(\lambda^2-4\,\lambda+11) &= 0\\
4\,\lambda^2+48\,\lambda-36 &= 0\\
\lambda^2+12\,\lambda-9 &= 0\\
\lambda_{1,2} &= \frac{-12\pm\sqrt{144+36}}{2}=-6\pm\sqrt{45}\approx\begin{cases}-12.7082\\+0.708204\end{cases}
\end{aligned}$$

Solution pour problème 6–42 : a) $S_1(2,6,9),\ S_2(6,6,7)$ b) $S_1(7,2,3),\ S_2(14,-1,3)$

Solution pour problème 6–43 : $2x+y+2z-9=0$ et $2x-y+2z-9=0$

Solution pour problème 6–44 : $3x-5y-4z-19=0$

Solution pour problème 6–45 :

(a) Avec completion du carrée on transforme l'équation pour trouver les paramètre de la boule.

$$\begin{aligned}
x^2-4\,x+y^2+6\,y+z^2+9 &= 0\\
(x-2)^2+(y+3)^2+z^2 &= -9+2^2+3^2=4
\end{aligned}$$

Donce le centre est $\vec{M}=(2\,,\,-3\,,\,0)$ et la boule a un rayon de$R=\sqrt{4}=2$.

(b) Dabord trouver la distance du centre de la boule du plan. Le vecteur normalisé du plan est

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

Donc la forme Hessienne de l'équation du plan est

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\,x+\frac{1}{\sqrt{6}}\,y+\frac{2}{\sqrt{6}}\,z-\frac{17}{\sqrt{6}}=0$$

Das distance orientée du centre $\vec{M}$ du plan est

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\,2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-3) + \frac{2}{\sqrt{6}}\,0 - \frac{17}{\sqrt{6}} = \frac{-18}{\sqrt{6}} = -3\sqrt{6}$$

Avec rayon $R = 2$ on arrive à la distance boule–plan $3\sqrt{6} - 2 \approx 5.34847$.

Solution pour problème 6–46 : La composante z du point de contacte est donnée par l'équation du plan: $1 - 6 + 2\,z - 1 = 0$, alors $z = 3$. Le vecteur de connection du point de contact au centre de la boule doit être un multiple du vecteur normal. Donner les coordonnées du centre à l'aide du vecteur $\vec{n} = (1\,,\,-2\,,\,2)^T$ normalisé. On obtient

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Alors l'équation de la sphère est

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 6^2$$

Dans cette équation on utilise la perametrisation de la droite pour arriver à

$$\begin{array}{rcl} (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 &=& 6^2 \\ (t-3)^2 + (t+1)^2 + (6-2\,t-7)^2 &=& 6^2 \\ (1+1+4)\,t^2 + (-6+2+4)\,t + 9 + 1 + 1 &=& 36 \\ 6\,t^2 &=& 25 \\ t &=& \pm\frac{5}{\sqrt{6}} \end{array}$$

Les deux point d'intersection sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \pm \frac{5}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 6–47 : Die geographische Breite ist der Ergänzungswinkel auf 90° zum Winkel θ in Kugelkoordinaten.

(a) Mit leicht modifizierten Kugelkoordinaten ergibt sich für Zürich $\vec{Z}$ und Salt Lake City $\vec{S}$

$$\vec{Z} = R \begin{pmatrix} \cos 47^\circ\ \cos 8^\circ \\ \cos 47^\circ\ \sin 8^\circ \\ \sin 47^\circ \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4254.78 \\ 597.97 \\ 4607.53 \end{pmatrix} km$$

und

$$\vec{S} = R \begin{pmatrix} \cos 41^\circ\ \cos 112^\circ \\ -\cos 41^\circ\ \sin 112^\circ \\ \sin 47^\circ \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1781.13 \\ -4408.45 \\ 4133.17 \end{pmatrix} km$$

(b) der Abstand entlang einer Geraden ist gegeben durch

$$d_1 = \|\vec{Z} - \vec{S}\| \approx 7856.3 \text{ km}$$

(c) Um den Abstand entlang des Grosskreises zu bestimmen, muss zuerst der Winkel α zwischen den beiden Vektoren bekannt sein

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{Z}, \vec{S}\rangle}{\|\vec{Z}\|\ \|\vec{S}\|} \approx 0.222 \Longrightarrow \alpha \approx 1.346 \approx 77.15^\circ$$

Es gilt

$$d_2 = R\,\alpha \approx 8482.72 \text{ km}$$

Der Abstand entlang der Erdoberfläche ist grösser als entlang der Geraden.

(d) Ein Normalenvektor kann mit dem Vektorprodukt bestimt werden. Anschliessend kann der Vektor auch normalisiert werden.

$$\vec{n}_1 = \vec{S} \times \vec{Z} \approx \begin{pmatrix} -2.35126 \\ 2.66176 \\ 1.8258 \end{pmatrix} 10^7 \quad \text{oder} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -0.588792 \\ 0.666546 \\ 0.457209 \end{pmatrix}$$

(e) Untersuchen Sie die durch die z–Achse und den Normalenvektor $\vec{n}_2$ aufgespannte Ebene. Der Normalenvektor $\vec{n}_2$ schliesst mit der z–Achse den selben Winkel ein, der exakt die maximale geographische Breite angibt. Somit gilt

$$\text{maximale Breite } = \arccos 0.457 \approx 62.8^\circ$$

6.10 récapitulation

Après ce chapitre on doit

- maîtriser les opérations graphique avec des vecteurs.
- savoir calculer avec des vecteur d'une façon fiable et rapide: addition, multiplication avec scalaire, produit scalaire et produit vectorielle.
- savoir travailler avec des formes différentes des équations des droites.
- savoir travailler avec des formes différentes des équations des plans.
- maîtriser les traduction géométrie à algèbre pour droites, plans , cercles et boules.

Bibliographie

[AntoRorr91] H. Anton and C. Rorres. *Elementary Linear Algebra, Applications Version*. John Wiley and Sons, Inc., 1991.

[Bach71] H. Bachmann. *Vektorgeometrie*. Sabe, Velagsinstitut für Lehrmittel, 1971.

[GerrBurc75] A. Gerrard and J. M. Burch. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. John Wiley & Sons, 1975. Dover edition 1994.

[LandHest92] E. M. Landesman and M. R. Hestenes. *Linear Algebra for Mathematics, Science and Engineering*. Prentice Hall, 1992.

[Pres86] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes (in PASCAL)*. Cambridge University Press, 1986.

[Pres92] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, second edition, 1992.

[Schw75] W. Schwarz. *Brücke zur Höheren Mathematik*. Verlag Vieweg, Braunschweig, 1975.

[Solo90] D. Solow. *How to Read and Do Proofs*. John Wiley & Sons, New York, 1990.

[StanMeieFalc96] S. Stankowski, C. Meier, and L. Falco. Matrix–Optik im Physik–Unterricht. Jahresbericht 1995/96 der Ingenieurschule Biel, 1996.

[Swok92] E. W. Swokowski. *Calculus, late Trigonometry Version*. PWS–Kent Publishing Company, Boston, fifth edition, 1992.

Liste des figures

Liste des tableaux